

Μάθημα 30ο - Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Λύση της εξίσωσης $\eta\mu\chi = a$

Αν $a > 1$ ή $a < -1$ η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $-1 \leq \eta\mu\chi \leq 1$ για κάθε χ

Αν $a \in [-1, 1]$ τότε αναζητούμε

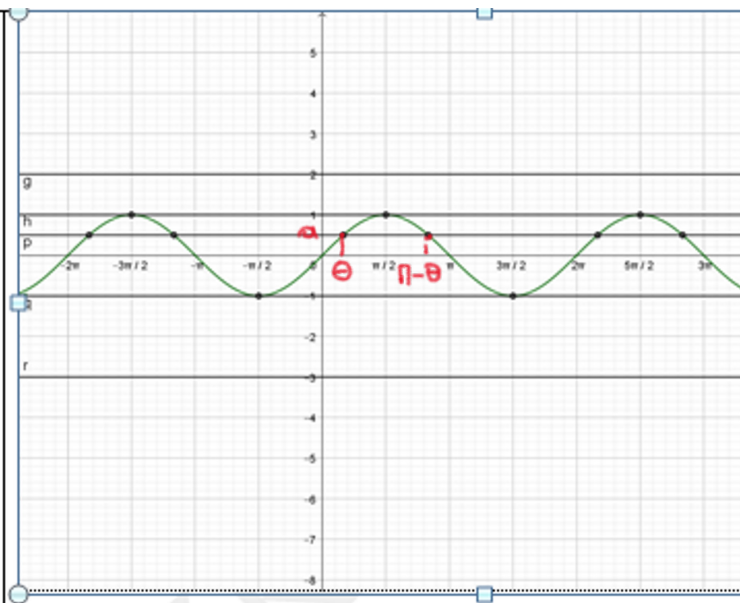
γωνία $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοια

ώστε $\eta\mu\theta = a$ οπότε η εξίσωση γίνεται : $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta$ και έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$\chi = 2k\pi + \theta$$

$$\eta' \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\chi = 2k\pi + \pi - \theta$$



$$\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$$

$$\psi\chi = \psi\frac{\pi}{6}$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\chi = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\eta\mu\chi = -\frac{1}{2}$$

$$\psi\chi = \psi\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\chi = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\chi = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\chi = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\eta\mu\chi = 1$$

$$\psi\chi = \psi\frac{\pi}{2}$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\chi = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Τέλειες}$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\eta\mu\chi = -1$$

$$\psi\chi = \psi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\chi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\chi = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Τέλειες}$$

$$\chi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\eta\mu\chi = 0$$

$$\psi\chi = \psi 0$$

$$\chi = 2k\pi$$

$$\chi = 2k\pi + \pi$$

$$\chi = k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Λύση της εξίσωσης $\sin \chi = a$.

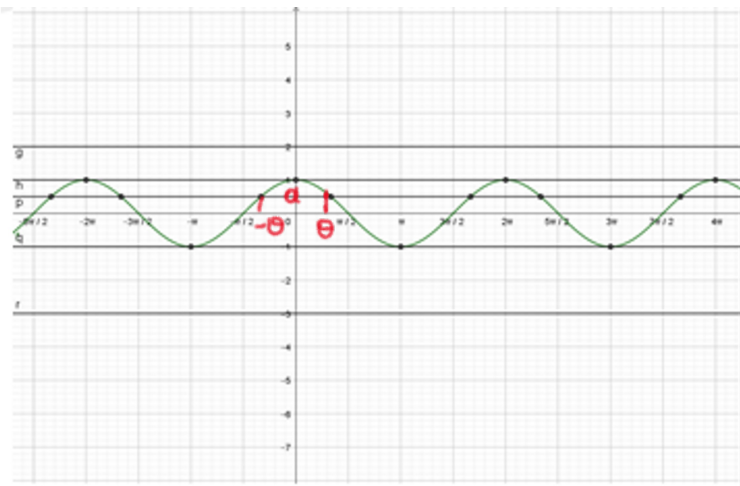
Αν $a > 1$ ή $a < -1$ η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $-1 \leq \sin \chi \leq 1$ για κάθε χ

Αν $a \in [-1, 1]$ τότε αναζητούμε γωνία $\theta \in [0, \pi]$ τέτοια ώστε $\sin \theta = a$ οπότε η εξίσωση γίνεται : $\sin \chi = \sin \theta$ και έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$\chi = 2k\pi + \theta$$

$$\eta', \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\chi = 2k\pi - \theta$$



$$\sin \chi = \frac{1}{2}$$

$$\sin \chi = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\chi = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$

• Λύση της εξίσωσης $\sin \chi = a$

$$\sin \chi = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \chi = \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right)$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$$

$$\chi = 2k\pi - \frac{7\pi}{6}$$

$$\sin \chi = 1$$

$$\sin \chi = \sin 0$$

$$\chi = 2k\pi + 0$$

$$\chi = 2k\pi - 0$$

$$\chi = 2k\pi$$

$$\sin \chi = -1$$

$$\sin \chi = \sin \pi$$

$$\chi = 2k\pi + \pi$$

$$\chi = 2k\pi - \pi$$

$$\chi = 2k\pi + \pi$$

$$\sin \chi = 0$$

$$\sin \chi = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\chi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

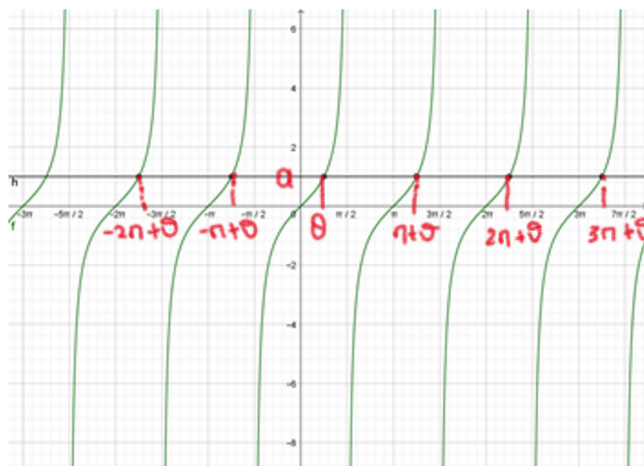
$$\chi = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Προσοχή πρέπει $\chi \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Η εξίσωση έχει λύση για οποιαδήποτε τιμή του a .

Αναζητούμε γωνία $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ με $\sin \theta = a$ και η εξίσωση γίνεται $\sin \chi = \sin \theta$

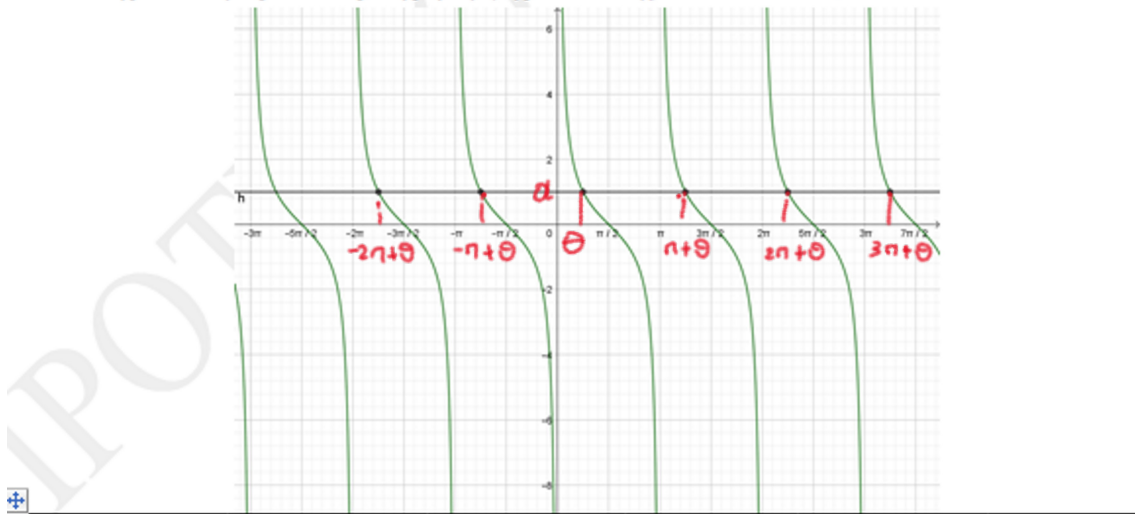
που έχει άπειρες λύσεις της μορφής : $\chi = k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$



- Λύση της εξίσωσης $\sigma\varphi\chi = \alpha$ Προσοχή πρέπει $\chi \neq \kappa\pi$.

Η εξίσωση έχει λύση για οποιαδήποτε τιμή του α .

Αναζητούμε γωνία $\theta \in (0, \pi)$ με $\sigma\varphi\theta = \alpha$ και η εξίσωση γίνεται $\sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\theta$ που έχει άπειρες λύσεις της μορφής : $\chi = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$



$\varepsilon\varphi\theta = 1$ $\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$ $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$	$\varepsilon\varphi\theta = -1$ $\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{4})$ $\theta = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$	$\varepsilon\varphi\theta = 0$ $\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi 0$ $\theta = \kappa\pi$ $\kappa \in \mathbb{Z}$	$\sigma\varphi\theta = \sqrt{3}$ $\sigma\varphi\theta = \sigma\varphi\frac{\pi}{6}$ $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$	$\sigma\varphi\theta = -\sqrt{3}$ $\sigma\varphi\theta = \sigma\varphi(-\frac{\pi}{6})$ $\theta = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$	$\sigma\varphi\theta = 0$ $\sigma\varphi\theta = \sigma\varphi\frac{\pi}{2}$ $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$
---	---	--	---	---	--