

Μάθημα 35ο - Γενικές ασκήσεις τριγωνομετρίας

ΘΕΜΑ 5

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = \angle AOM$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά

τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x=1$ στο σημείο K .

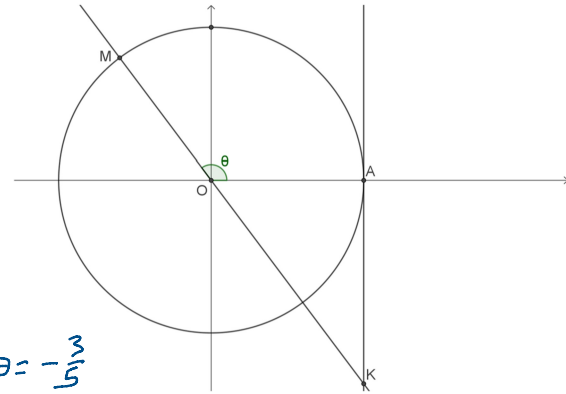
α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta, \epsilon\phi\theta, \sigma\phi\theta$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K .

γ) Έστω μια γωνία $\phi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$.

i. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο έχει η γωνία ϕ την τελική πλευρά.

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \phi$.



$$\alpha) \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{9}{25}$$

$$\text{Επειδή } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta < 0 \text{ οπότε } \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$$

$$\epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}, \quad \sigma\phi\theta = \frac{1}{\epsilon\phi\theta} = -\frac{3}{4}$$

$$\beta) M(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta) \rightarrow M(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$$

$$K(1, \epsilon\phi\theta) \rightarrow K(1, -\frac{4}{3})$$

$$\gamma) i) \eta\mu\phi > 0, \sigma\upsilon\nu\phi < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \phi < \pi$$

$$ii) \eta\mu\theta > \eta\mu\phi \xrightarrow[\eta\mu\downarrow]{\theta, \phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]} \theta < \phi$$

ΘΕΜΑ 6ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2

και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu(\frac{\pi}{2}-x) \cdot \epsilon\phi(\pi-x) \cdot \eta\mu(2\pi+x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi-x) \cdot \sigma\phi(\frac{7\pi}{2}-x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+x)}$. Να δείξετε

ότι $A = -1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

$$\alpha) T = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \beta = 4$$

$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(4x)$$

$$\min f = -2 \Rightarrow -\frac{\alpha+1}{2} = -2 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\beta) \eta\mu(\frac{\pi}{2}-x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad \epsilon\phi(\pi-x) = -\epsilon\phi x, \quad \eta\mu(2\pi+x) = \eta\mu x$$

$$\sin(3\pi - x) = \sin(2\pi + \pi - x) = \sin(\pi - x) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\text{ΟΠΟΤΕ } A = \frac{\sin x \cdot (-\cos x) \cdot \cos x}{-\sin x \cdot \cos x \cdot (-\cos x)} = -1$$

$$\gamma) f(x) = 2A \Leftrightarrow 2 \sin 4x = -2 \Leftrightarrow \sin 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ ΟΠΩΣ } x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ ΟΠΟΤΕ } k = 2 \text{ ΚΑΙ } x = \frac{5\pi}{4}$$

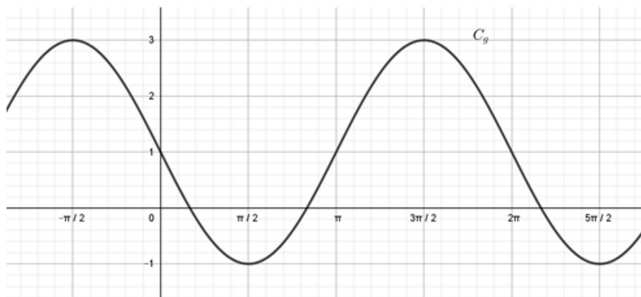
ΘΕΜΑ 9ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



$$\alpha) T = \frac{2\pi}{3}, \max f = 3, \min f = -1$$

$$\beta) T = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$$

$$\max f = 3, \min f = -1$$

$$g(0) = 1 \Rightarrow \boxed{\gamma = 1}$$

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a < 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Για $\alpha = -2, \beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$

$$g(x) = -2\eta\mu x + 1$$

$$\text{ii) } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\eta\mu 3x + 1 = -2\eta\mu x + 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu 3x = -2\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 3x = -\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu(-x)$$

$$3x = 2k\pi - x \quad \vee \quad 3x = 2k\pi + \pi + x$$

$$4x = 2k\pi \quad 2x = 2k\pi + \pi$$

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{για } k=0: x=0, \quad x=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{για } k=1: x=\frac{\pi}{2}, \quad x=\pi+\frac{\pi}{2} \text{ απρ}$$

$$\text{για } k=2: x=\pi \text{ απρ.}, \quad x=2\pi+\frac{\pi}{2} \text{ απρ.}$$

$$\text{για } k=-1: x=-\frac{\pi}{2} \text{ απρ.}, \quad x=-\pi+\frac{\pi}{2} \text{ απρ}$$

$$\text{Άρα } x=0, x=\frac{\pi}{2}$$

ΘΕΜΑ 10ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική

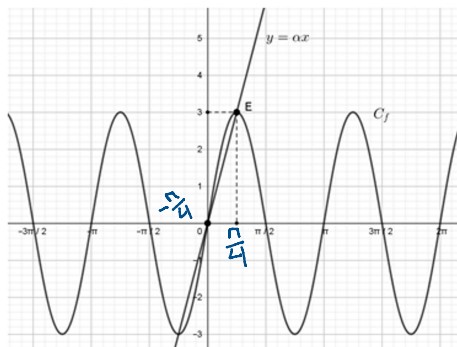
παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta \mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με

βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3 \eta \mu(2x) - \frac{12}{\pi} x = 0$.



$$a) T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \pi \Rightarrow \boxed{\omega = 2}$$

$$\max f = 3 \xrightarrow{\rho > 0} \boxed{\rho = 3} \text{ για } x = \frac{\pi}{4}$$

$$b) E \in (\varepsilon) \Rightarrow 3 = \alpha \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{12}{\pi}}$$

$$\delta) y = \frac{12}{\pi} \cdot x$$

$$3 \eta \mu(2x) = \frac{12}{\pi} \cdot x \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = -\frac{\pi}{4}$$

που είναι οι τεταγμένες των κορυφών
σημείων ω f και ω $(\varepsilon): y = \frac{12}{\pi} x$