

8. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x-p$. Σημειώ

i) $P(x) = 4x^4 + 7x^2 + 12$

ii) $Q(x) = -5x^6 - 3x^2 - 4$

α. ρ. δ. ο $P(p) \neq 0$
και $Q(p) \neq 0$
για κάθε $p \in \mathbb{R}$

i) $P(p) = 4p^4 + 7p^2 + 12 \neq 0$ για κάθε $p \in \mathbb{R}$ διότι

$$\begin{array}{l} 4p^4 \geq 0 \\ 7p^2 \geq 0 \\ 12 > 0 \end{array} \Bigg| \xrightarrow{(+)} 4p^4 + 7p^2 + 12 > 0$$

ii) $Q(p) = -5p^6 - 3p^2 - 4 \neq 0$ για κάθε $p \in \mathbb{R}$ διότι

$$\begin{array}{l} -5p^6 \leq 0 \\ -3p^2 \leq 0 \\ -4 < 0 \end{array} \Bigg| \rightarrow -5p^6 - 3p^2 - 4 < 0$$

4. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)^{2v} - x^{2v} - 2x - 1$, $v \neq 0$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $2x^3 + 3x^2 + x$.

$$2x^3 + 3x^2 + x = x(2x^2 + 3x + 1) = x \cdot 2(x+1)(x+\frac{1}{2})$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{4} \leq \frac{-1}{2}$$

Συνεπώς οι παράγοντες του $2x^3 + 3x^2 + x$ είναι οι $x, x+1, x+\frac{1}{2}$

και για να είναι και παράγοντες του $P(x)$ αρκεί

$$P(0) = P(-1) = P(-\frac{1}{2}) = 0$$

Γίνεται $P(0) = (0+1)^{2v} - 0^{2v} - 2 \cdot 0 - 1 = 1^{2v} - 0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$$P(-1) = (-1+1)^{2v} - (-1)^{2v} - 2 \cdot (-1) - 1 = 0^{2v} - 1 + 2 - 1 = 0$$

(2v
αρτίο)

$$P(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}+1)^{2v} - (-\frac{1}{2})^{2v} - 2(-\frac{1}{2}) - 1 = (\frac{1}{2})^{2v} - (\frac{1}{2})^{2v} + 1 - 1 = 0$$

2. i) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $ax+b$, $a \neq 0$ είναι $v = P(-\frac{b}{a})$.

ii) Να βρείτε τις συνθήκες, για τις οποίες το πολυώνυμο ax^3+b διαιρείται με το $ax+b$.

$$\begin{array}{l} P(x) \\ \hline U(x) \end{array} \bigg| \begin{array}{l} ax+b \\ \hline \pi(x) \end{array}$$

$$\text{βαθμός } U(x) < \text{βαθμός } (ax+b)$$

$$\text{βαθμός } U(x) < 1$$

οπότε $U(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο

Έστω ότι $U(x)=v$ όπου $v \in \mathbb{R}$

Τότε $P(x) = \pi(x)(ax+b) + v$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Για } x = -\frac{b}{a} \text{ έχω } P(-\frac{b}{a}) = \pi(-\frac{b}{a})(\cancel{a(-\frac{b}{a})} + b) + v \Rightarrow$$

$$\boxed{P(-\frac{b}{a}) = v}$$

Διαιρέτος

Διαιρέτης

Υπόλοιπο

$$P(x)$$

$$2x-1$$

$$P(\frac{1}{2})$$

$$P(x)$$

$$2x+3$$

$$P(-\frac{3}{2})$$

$$P(x)$$

$$-3x+5$$

$$P(\frac{5}{3})$$

$$P(x)$$

$$-3x-4$$

$$P(-\frac{4}{3})$$

$$P(x)$$

$$3x$$

$$P(0)$$

$$P(x) \text{ διαιρείται με το } ax+b \Leftrightarrow P(-\frac{b}{a}) = 0$$

ii) Αν $P(x) = ax^3+b$ ηρεση και αρκεί

$$P(-\frac{b}{a}) = 0 \Leftrightarrow a(-\frac{b}{a})^3 + b = 0 \Leftrightarrow a \frac{-b^3}{a^3} + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{b^3}{a^2} + b = 0 \Leftrightarrow -b^3 + a^2b = 0 \Leftrightarrow b(a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow b(a+b)(a-b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$b=0 \vee a=-b \vee a=b$$