

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{x^2-3x+2}{x}$

ii) $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

$$\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x(x-1)} = \frac{x^2-3x+2}{x}$$

ΕΚΚ = $x(x-1)$
 $x \neq 0, x \neq 1$

$$x(x-1) \cdot \frac{3x^2-1}{x-1} - x(x-1) \cdot \frac{2}{x(x-1)} = x(x-1) \cdot \frac{x^2-3x+2}{x}$$

$$3x^3 - x - 2 = x^3 - 3x^2 + 2x - x^2 + 3x - 2$$

$$2x^3 + 4x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$x=0$ αλ=0 $x=1$ αλ=0 $x=-3$ δεκτη

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-2}{x+1} > 0$

ii) $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0$

iii) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0$

i) $\frac{x-2}{x+1} > 0$ $x \neq -1$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+
$P(x)$	+	-	+	+

$x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

ii) $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0$, $x \neq 3$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$P(x)$	+	-	+	+

$x \in [-\frac{1}{2}, 3)$

$x^2+x-2 \neq 0$ $x^2-x-2=0$
 $x \neq 1, x \neq -2$ $x=-1, x=2$

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
x^2-x-2	+	+	0	-	0	+
x^2+x-2	+	0	-	-	0	+
$P(x)$	+	-	+	+	-	+

$x \in (-2, -1] \cup (1, 2]$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{2x+3}{x-1} > 4$

ii) $\frac{x-2}{3x+5} \leq 4$

iii) $\frac{x^2-3x-10}{x-1} + 2 \leq 0$

iv) $\frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1}$

v) $\frac{x}{2x-1} \geq \frac{3}{x+2}$

Σχόλιο: Δεν κάνω ανατομή παρονομασμών (όπου χιαστί) εκτός και αν είμαστε σίγουροι για το πρόσημο του ΕΚΛ, οπότε όλα σωστά με μέτρο και ορόσημα

i) $\frac{2x+3}{x-1} > 4 \iff \frac{2x+3}{x-1} - 4 > 0 \iff \frac{2x+3-4(x-1)}{x-1} > 0 \iff \frac{-2x+7}{x-1} > 0$

$x \neq 1$

x	$-\infty$	1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$-2x+7$	+	+	0	-
$x-1$	-	0	+	+
$p(x)$	-	-	+	-

$x \in (1, \frac{7}{2})$

ii) $\frac{x-2}{3x+5} \leq 4 \iff \frac{x-2}{3x+5} - 4 \leq 0 \iff \frac{x-2-4(3x+5)}{3x+5} \leq 0 \iff \frac{-11x-22}{3x+5} \leq 0$

$3x+5 \neq 0$

$x \neq -\frac{5}{3}$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{5}{3}$	$+\infty$
$-11x-22$	+	0	-	-
$3x+5$	-	-	0	+
$p(x)$	-	+	-	-

$x \in (-\infty, -2] \cup (-\frac{5}{3}, +\infty)$

iv) $\frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1} \iff \frac{x-1}{3x-5} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \iff$

$3x-5 \neq 0, x-1 \neq 0$

$x \neq \frac{5}{3}, x \neq 1$

$\frac{x(x-1)-2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \iff \frac{x^2-x-6x+10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0$

$x^2-7x+10=0$

$x=2, x=5$

$\frac{x^2-7x+10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0$

$x \in (1, \frac{5}{3}) \cup [2, 5]$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	2	5	$+\infty$
$x^2-7x+10$	+	+	0	-	+
$3x-5$	-	0	+	+	+
$x-1$	-	0	+	+	+
$p(x)$	+	-	+	-	+

v) $\frac{x}{2x-1} \geq \frac{3}{x+2} \iff \frac{x+2}{2x-1} - \frac{3}{x+2} \geq 0 \iff \frac{x(x+2)-3(2x-1)}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \iff$

$2x-1 \neq 0, x+2 \neq 0$

$x \neq \frac{1}{2}, x \neq -2$

$\frac{x^2+2x-6x+3}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \iff \frac{x^2-4x+3}{(2x-1)(x+2)} \geq 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1, x = 3$$

X	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	+	+	0	0	+
$2x - 1$	-	-	0	+	+	+
$x + 2$	-	0	+	+	+	+
P(x)	+	-	-	+	0	+

$$x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup [3, +\infty)$$

6. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + \frac{2}{2x-1} \geq \frac{1}{x(2x-1)}$

$$x \neq 0$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$

$$x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3(2x-1) + 2x - 1}{x(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x-1)(x^3+1)}{x(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x} \geq 0$$

X	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
x^2-x+1	+	+	+	+
x	-	-	0	+
P(x)	+	0	-	+

$$x \in (-\infty, -1] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$