

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{x^3} = -4x$

ii) $\sqrt{3x-2} = 4$

iii) $\sqrt{5x-1} = -4$

iv) $\sqrt{x+3} = x+1$

v) $\sqrt{x+3} = \sqrt{10-x} + 1$

vi) $\sqrt{x} + \sqrt{x-20} = 10$

i) Πρέπει $x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

οπότε $-4x \leq 0$

Αν $-4x < 0$ τότε $\sqrt{x^3} = -4x$ αδύνατη

Αν $x = 0$ τότε $\sqrt{0^3} = -4 \cdot 0$ ισχύει

Συνεπώς $x = 0$

ii) Πρέπει $3x-2 \geq 0$
 $3x \geq 2$
 $x \geq \frac{2}{3}$

$\sqrt{3x-2} = 4 \Leftrightarrow$

$\sqrt{3x-2}^2 = 4^2 \Leftrightarrow$

$3x-2 = 16$

$3x = 18$

$x = 6$ Σημειώ αφού
 $6 > \frac{2}{3}$

iii) $\sqrt{5x-1} = -4$ Αδύνατη

iv) $\sqrt{x+3} = x+1$ Πρέπει $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

· Αν $x+1 < 0$ τότε αδύνατη

· Αν $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ τότε εκw

$\sqrt{x+3}^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x+3 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$x = 1$ ή $x = -2$

Σημειώ αφού $1 > -1 > -2$

Λυσιπποιντορα
 $-2 < -1$

v) $\sqrt{x+3} = \sqrt{10-x} + 1$

Πρέπει $x+3 \geq 0$ και $10-x \geq 0$
 $x \geq -3$ και $x \leq 10$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}^2 = (\sqrt{10-x} + 1)^2 \Leftrightarrow$

$x+3 = 10-x + 2\sqrt{10-x} + 1 \Leftrightarrow$

$x+3-10+x-1 = 2\sqrt{10-x} \Leftrightarrow$

$2x-8 = 2\sqrt{10-x} \stackrel{:2}{\Leftrightarrow}$

$x-4 = \sqrt{10-x}$

Αν $x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$ αδύνατη

Αν $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ τότε $(x-4)^2 = \sqrt{10-x}^2 \Leftrightarrow$

οπότε $-3 \leq x \leq 10$

$$\text{Ην } x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4 \text{ αδυνατεί}$$

$$\text{Αν } x-4 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 4} \text{ τότε } (x-4)^2 = \sqrt{10-x}^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 8x + 16 = 10 - x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{ ή } x=6$$

αδυνατεί δίνει αφαι $-3 < 4 < 6 < 10$
αφαι $1 < 4$

$$vi) \sqrt{x} + \sqrt{x-20} = 10 \quad \text{Πρέπει } x \geq 0 \text{ και } x-20 \geq 0 \quad \text{Τελικά } x \geq 20$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x-20})^2 = 10^2 \Leftrightarrow$$

$$x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-20} + x-20 = 100 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-20} = 120 - 2x \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-20} = 60 - x$$

$$\cdot \text{Αν } 60 - x < 0 \Leftrightarrow x > 60 \text{ αδυνατεί}$$

$$\cdot \text{Αν } 60 - x \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \leq 60} \text{ τότε } (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-20})^2 = (60-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$x(x-20) = 3600 - 120x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 20x = 3600 - 120x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$100x = 3600$$

$$\boxed{x=36} \text{ δίνει αφαι } 20 < 36 < 60$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$$

$$ii) \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0$$

3. Ομοίως τις εξισώσεις:

$$i) x^2 + x - 4 = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$ii) \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x+4}$$

$$i) x + 3\sqrt{x} - 10 = 0 \quad \text{Πρέπει } x \geq 0$$

$$\text{Θέτω } \sqrt{x} = w \text{ οπότε } x = \sqrt{x}^2 = w^2 \text{ και η εξίσωση γίνεται}$$

$$w^2 + 3w - 10 = 0$$

$$w = 2 \text{ ή } w = -5$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$\boxed{x=4}$$

$$\sqrt{x} = -5$$

$$\text{αδυνατεί}$$

$$ii) \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0 \quad \text{Πρέπει } x^2 \geq 0 \text{ και } \boxed{x \geq 0}$$

$$\text{Θέτω } \sqrt[3]{x} = w \text{ οπότε } \sqrt[3]{x^2} \stackrel{x \geq 0}{=} (\sqrt[3]{x})^2 = w^2 \text{ και έχω}$$

$$w^2 + w - 6 = 0$$

$$w = 2 \text{ ή } w = -3$$

$$\sqrt[3]{x} = 2$$

$$\boxed{x=8}$$

$$\sqrt[3]{x} = -3$$

$$\text{αδυνατεί}$$

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\sqrt{2x+3} < \sqrt{1-3x}$

ii) $\sqrt{x-3} > x-5$

i) Πρέπει

$$\begin{aligned} 2x+3 &\geq 0 \\ 2x &\geq -3 \\ x &\geq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

και

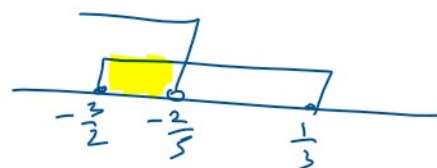
$$\begin{aligned} 1-3x &\geq 0 \\ -3x &\geq -1 \\ x &\leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Τελικά

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{2x+3} < \sqrt{1-3x} \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}^2 < \sqrt{1-3x}^2 \Leftrightarrow$$

$$2x+3 < 1-3x \Leftrightarrow 5x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{5}$$



Τελικά $x \in [-\frac{3}{2}, -\frac{2}{5})$

ii) $\sqrt{x-3} > x-5$

Πρέπει $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

1) Αν $x-5 < 0 \Leftrightarrow x < 5$ τότε ισχύει για $3 \leq x < 5 \Rightarrow x \in [3, 5)$

2) Αν $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ τότε $\sqrt{x-3}^2 > (x-5)^2 \Leftrightarrow$
 $x-3 > x^2-10x+25 \Leftrightarrow$
 $x^2-11x+28 < 0$

x	4	7
$x^2-11x+28$	+	-

$$4 < x < 7$$

Οπότε $x \geq 5$ οπότε $5 \leq x < 7 \Rightarrow x \in [5, 7)$

Τελικά $x \in [3, 5) \cup [5, 7) \Rightarrow x \in [3, 7)$