

Μάθημα 51ο-Λύση εργασίας Άρρητες εξισώσεις
ανισώσεις

Θέμα 3^ο Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

β) $x + \sqrt{x+5} = 7$

γ) $\sqrt{x^2 - x + 5} = x - 3$

δ) $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-5} = 3$

ε) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 2$

β) $x + \sqrt{x+5} = 7$

Πρέπει $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq -5}$

$\sqrt{x+5} = 7-x$

Αν $7-x < 0 \Leftrightarrow x > 7$ αδύνατο

Αν $7-x \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \leq 7}$ τότε $\sqrt{x+5}^2 = (7-x)^2 \Leftrightarrow$

$x+5 = 49 - 14x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 44 = 0$

$x = 11$ ή $x = 4$

Απορρίπτει
αφού $11 > 7$

Δέχεται
αφού $-5 < 4 < 7$

Αφού $x < x+1$

ε) $\sqrt{x} < \sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x+1} < 0$ συνεπώς

$\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 2$ αδύνατο

Θέμα 4^ο Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\sqrt{x-2} < \sqrt{2x+1}$

β) $\sqrt{4x+1} < \sqrt{1-2x}$

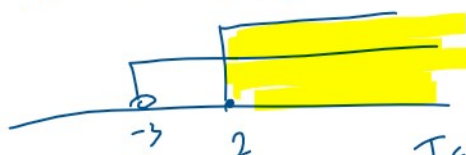
γ) $\sqrt{x^2+1} > x$

δ) $\sqrt{x^2+1} > -x$

α) Πρέπει $x-2 \geq 0$ και $2x+1 \geq 0$
 $x \geq 2$ $x \geq -\frac{1}{2}$

Άρα $\boxed{x \geq 2}$

$\sqrt{x-2} < \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x-2}^2 < \sqrt{2x+1}^2 \Leftrightarrow x-2 < 2x+1 \Leftrightarrow$
 $-x < 3 \Leftrightarrow \boxed{x > -3}$



Τελικά $x \geq 2$ ή $x \in [2, +\infty)$

$$\beta) \sqrt{4x+1} < \sqrt{1-2x}$$

Πρέπει $4x+1 \geq 0$ και $1-2x \geq 0$
 $x \geq -\frac{1}{4}$ $x \leq \frac{1}{2}$



$$\sqrt{4x+1}^2 < \sqrt{1-2x}^2 \Leftrightarrow 4x+1 < 1-2x \Leftrightarrow 6x < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Τελικά $x \in [-\frac{1}{4}, 0)$

$$\gamma) \sqrt{x^2+1} > x$$

10) Πρέπει $x^2+1 \geq 0$
 $x^2 \geq -1$

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1η) Αν $x < 0$ ισχύει αφού $\sqrt{x^2+1} > 0 > x$

2η) Αν $x \geq 0$ τότε $\sqrt{x^2+1}^2 > x^2 \Leftrightarrow x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει

Τελικά $\sqrt{x^2+1} > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

20) $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ 'Αρα $\sqrt{x^2+1} > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$ 'Αρα $\sqrt{x^2+1} > -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 5 / σελ. 193

ii) $6x^4 + 29x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 0$

Π.Α.Ρ = 1 και -1 αλλά καμία από αυτές δεν είναι ρίζα

Π.Ρ.Ρ. : $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$
 εφ' όσον

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & 29 & 27 & 9 & 1 \\ & -3 & -13 & -7 & -1 \\ 6 & 26 & 14 & 2 & 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \right.$$

Πρόταση

Αν $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

όπου $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

και $\frac{k}{2}$ ακέραιο πηλίκο

του $P(x)$ τότε

κ διαίρεση του a_0

2 διαίρεση του a_n

$$(x + \frac{1}{2})(6x^3 + 26x^2 + 14x + 2) = 0$$

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -15 & -1 \\ 26 & 14 & 2 & 0 \end{array}$$

$$(x + \frac{1}{2})(6x^2 + 24x + 6)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 26 & 14 & 2 \\ -2 & -8 & -2 & \\ 6 & 24 & 6 & 0 \end{array} \quad -\frac{1}{3}$$

$$(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3})(6x^2 + 24x + 6) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{3} \vee 6x^2 + 24x + 6 = 0$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{2(-2 \pm \sqrt{3})}{2} =$$

$$= \begin{cases} -2 + \sqrt{3} \\ -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$