

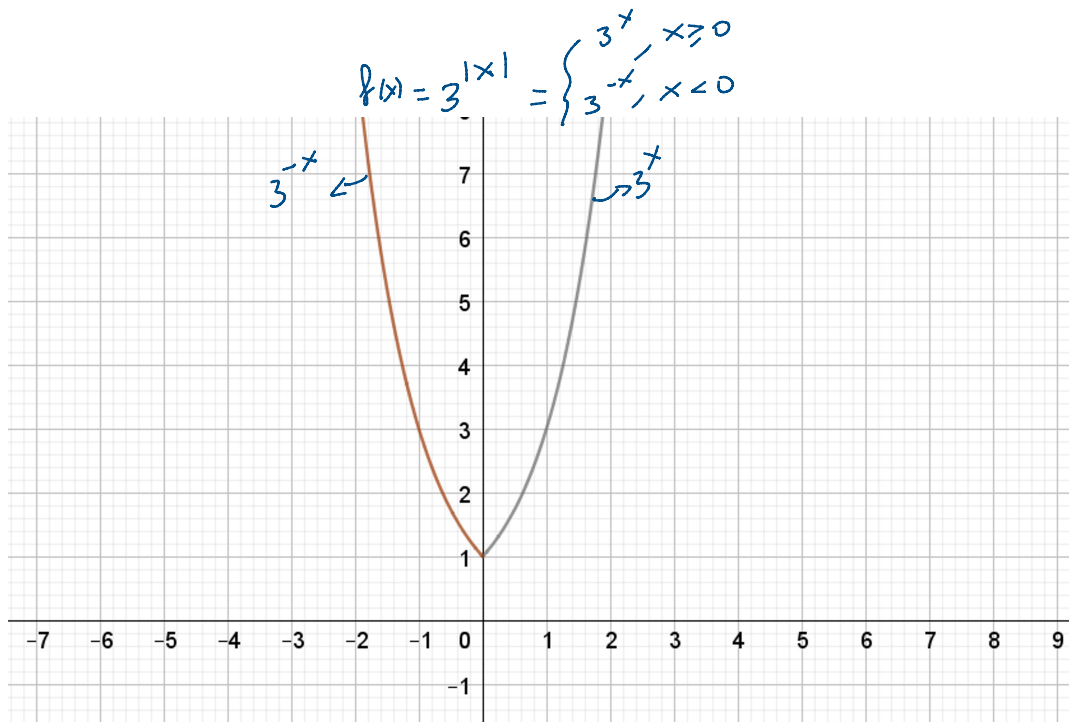
4. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3^{|x|}$

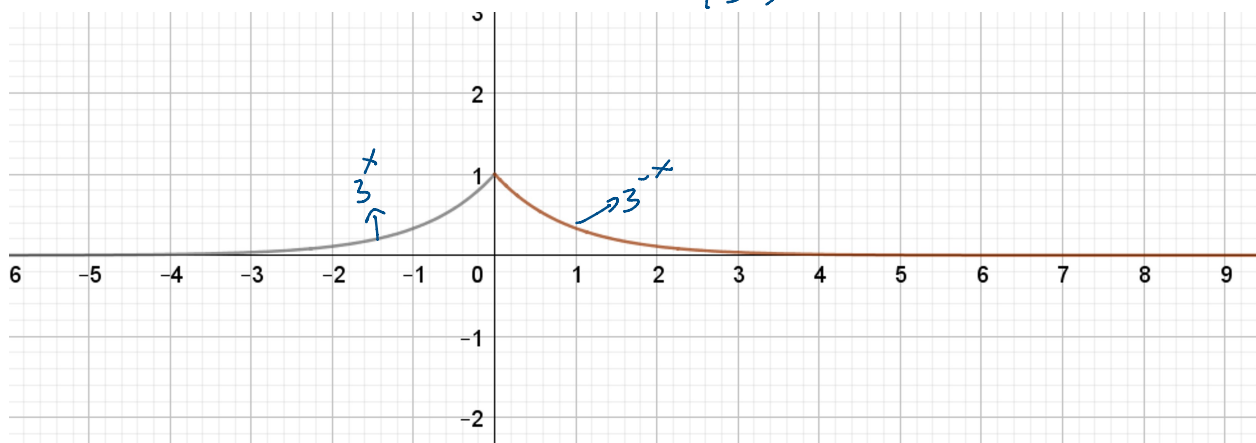
ii) $f(x) = 3^{-|x|}$

$$f(x) = 3^{|x|} = \begin{cases} 3^x, & x \geq 0 \\ 3^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 3^{-|x|} = \begin{cases} 3^{-x}, & x \geq 0 \\ 3^x, & x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = 3^{-|x|} = \begin{cases} 3^{-x}, & x \geq 0 \\ 3^x, & x < 0 \end{cases}$$



1. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση: $f(x) = \left(\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}\right)^x$. Για ποιές από αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι:

i) γνησίως φθίνουσα

ii) γνησίως αύξουσα

$$i) A = \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 0$$

$$\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

α	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2-\alpha$	+	+	0	-
$2\alpha-1$	-	0	+	+
$P(\alpha)$	-	+	-	-

$$ii) f \text{ εκθετική} \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} \neq 1$$

$$\frac{1}{2} < \alpha < 2$$

$$2-\alpha \neq 2\alpha-1$$

$$-3\alpha \neq -3$$

$$\alpha \neq 1$$

$$\text{Τελικά } \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)$$

$$iii) f \uparrow \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha-2\alpha+1}{2\alpha-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3\alpha+3}{2\alpha-1} > 0$$

$$\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

α	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$-3\alpha+3$	+	+	0	-
$2\alpha-1$	-	0	+	+
$P(\alpha)$	-	+	-	-

$$iv) f \downarrow \Leftrightarrow 0 < \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} < 1 \Leftrightarrow \alpha \in (1, 2)$$

ΕΚΘΕΤΙΚΉ ΕΓΓΙΩΣΗ

ΣΧΟΛΙΟ

Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=a^x$, με $0 < a \neq 1$,

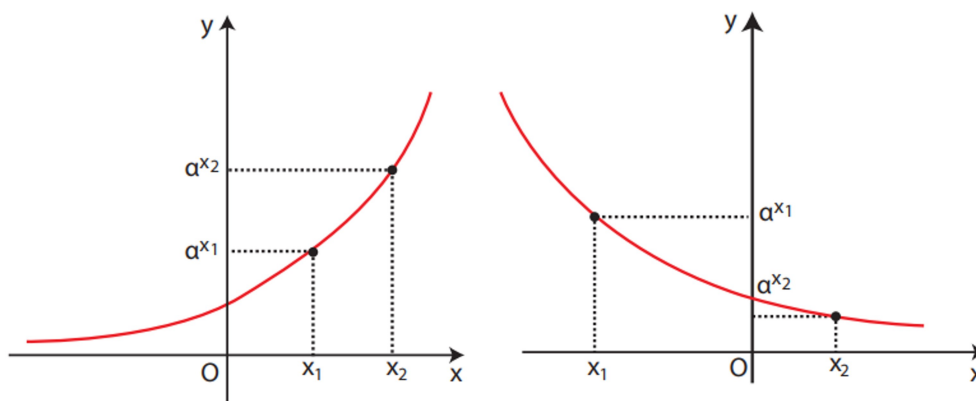
προκύπτει ότι: αν $X_1 \neq X_2$, τότε $a^{X_1} \neq a^{X_2}$

οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι:

αν $a^{X_1} = a^{X_2}$, τότε $X_1 = X_2$.

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^{X_1} = a^{X_2} \Leftrightarrow X_1 = X_2$$



2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^x = 64$

ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$

iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$

iv) $3^{-x} = \frac{1}{81}$

v) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27}$

vi) $27^{4x} = 9^{x+1}$

vii) $32^x = 16^{1-x}$

viii) $3^{x^2-x-2} = 1$

i) $2^x = 64$
 $2^x = 2^6$
 $x = 6$

ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
 $x = 3$

iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
 $x = -2$

iv) $3^{-x} = \frac{1}{81}$
 $3^{-x} = 3^{-4}$
 $-x = -4$
 $x = 4$

v) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27}$
 $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$
 $x = -3$

vi) $27^{4x} = 9^{x+1}$
 $(3^3)^{4x} = (3^2)^{x+1}$
 $3^{12x} = 3^{2x+2}$
 $12x = 2x + 2$
 $10x = 2$
 $x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

vii) $32^x = 16^{1-x}$
 $(2^5)^x = (2^4)^{1-x}$
 $2^{5x} = 2^{4-4x}$
 $5x = 4 - 4x$
 $9x = 4$
 $x = \frac{4}{9}$

viii) $3^{x^2-x-2} = 1$
 $3^{x^2-x-2} = 3^0$
 $x^2-x-2 = 0$
 $x = 2$ ή $x = -1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{2x+1} - 4 \cdot 2^x = 0$

ii) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

iii) $3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$

$$i) 2^{2x+1} = 4 \cdot 2^x$$

$$2^{2x+1} = 2^2 \cdot 2^x$$

$$2^{2x+1} = 2^{2+x}$$

$$2x+1 = 2+x$$

$$\boxed{x=1}$$

$$ii) 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$\text{Θ έτω } 2^x = w$$

$$\text{οπότε } 4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = w^2$$

$$\text{και ένω}$$

$$2w^2 - 5w + 2 = 0$$

$$w=2 \quad \text{ή} \quad w=\frac{1}{2}$$

$$2^x = 2$$

$$\boxed{x=1}$$

$$2^x = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x=-1}$$

$$iii) 3^{2x+1} - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$3^{2x} \cdot 3 - 26 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$\text{Θ έτω } 3^x = w \text{ και}$$

$$\text{ένω}$$

$$3w^2 - 26w - 9 = 0$$

$$w=9 \quad \text{ή} \quad w=-\frac{1}{3}$$

$$3^x = 9$$

$$\boxed{x=2}$$

$$3^x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{αδύνατη}$$