

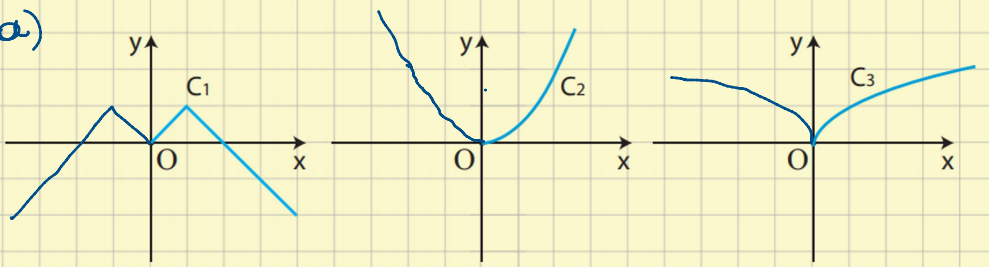
8) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις

α) Άρτιας συνάρτησης

και

β) Περιττής συνάρτησης.

α)



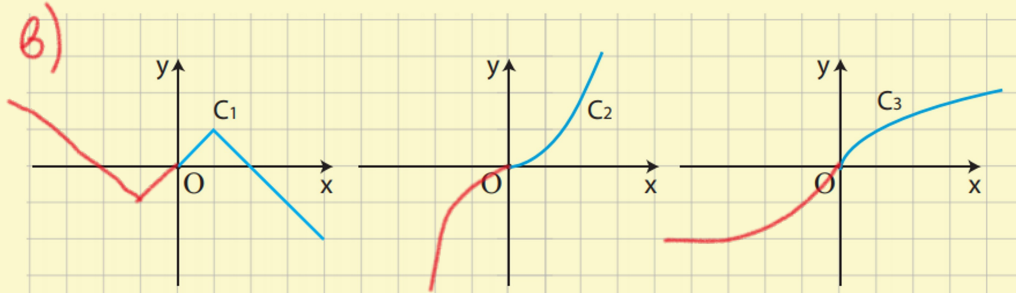
8) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις

α) Άρτιας συνάρτησης

και

β) Περιττής συνάρτησης.

β)



Θέμα 1ο Εξετάστε για ποια από τα παρακάτω σύνολα A ισχύει ότι για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$

$A_1 = (-3, 3)$, ~~$A_2 = (-3, 3]$~~ , $A_3 = [-3, 3]$, $A_4 = (-3, -2) \cup (2, 3)$,
 ~~$-3 \in A_2, 3 \notin A_2$~~

~~$A_5 = (-3, -2] \cup (2, 3)$~~ , $A_6 = (-3, -2] \cup [2, 3)$, $A_7 = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$,
 ~~$-2 \in A_5, 2 \notin A_5$~~

~~$A_8 = \mathbb{R} - \{2\}$~~ , $A_9 = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$, $A_{10} = \mathbb{R} - \{0\}$, $A_{11} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$
 ~~$-2 \in A_8, 2 \notin A_8$~~

Θέμα 2ο Μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $(\alpha, 3)$ είναι άρτια. Να βρείτε την τιμή του α .

Πρέπει για κάθε $x \in (\alpha, 3)$ και $-x \in (\alpha, 3)$ οπότε $\alpha = -3$

Θέμα 3ο Μία συνάρτηση f είναι άρτια και διέρχεται από το σημείο $(2,5)$. Να βρείτε το $f(-2)$.

$$\left. \begin{array}{l} (2,5) \in \mathcal{G} \Rightarrow f(2)=5 \\ f \text{ άρτια} \Rightarrow f(-2)=f(2) \end{array} \right\} \Rightarrow f(-2)=5$$

Θέμα 4ο Να δείξετε ότι αν μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι περιττή και $0 \in A$ τότε $f(0)=0$.

$$f \text{ περιττή} \Rightarrow f(-x) = -f(x), \text{ για κάθε } x \in A$$

$$\text{Για } x=0 \text{ έχω } f(-0) = -f(0) \rightarrow f(0) + f(0) = 0 \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Σχόλιο

Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ημίτιμη και $0 \in A$ τότε η $\mathcal{G}_f$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων $(0,0)$

Θέμα 5ο Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι και άρτια και περιττή. Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι ο $x\chi'$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ άρτια} \Rightarrow f(x) = f(-x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ f \text{ περιττή} \Rightarrow f(-x) = -f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$f(x) = -f(x), x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) + f(x) = 0$$

$$2f(x) = 0$$

$$f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

οπότε η $\mathcal{G}_f$ είναι ο $x\chi'$.

Θέμα 6ο Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές .

$$\alpha) f(x) = \frac{2x-3}{x-2} \quad \beta) f(x) = \frac{x^2-3}{|x|-2} \quad \gamma) f(x) = \frac{x-3}{x^2-1} \quad \delta) f(x) = \frac{x^2-3}{x}$$

α) $A = \mathbb{R} - \{2\}$ / β) $|x| \neq 2$
 $x \neq \pm 2$
 $A = \mathbb{R} - \{2, -2\}$
 αφού $-2 \in A$
 και $2 \notin A$
 ούτε άρτια
 ούτε περιττή
 οπότε για κάθε $x \in A$
 και $-x \in A$
 $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{|-x| - 2} =$
 $= \frac{x^2 - 3}{|x| - 2} = f(x)$
 Άρα f άρτια

γ) $x^2 \neq 1$
 $x \neq \pm 1$
 $A = \mathbb{R} - \{1, -1\}$
 οπότε για κάθε
 $x \in A$ και $-x \in A$
 $f(-x) = \frac{-x - 3}{(-x)^2 - 1} =$
 $= \frac{-(x+3)}{x^2 - 1} \neq f(x)$
 Συνεπώς ούτε άρτια
 ούτε περιττή

δ) $x \neq 0$
 $A = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$
 οπότε για κάθε
 $x \in A$ και $-x \in A$
 $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{-x} =$
 $= \frac{x^2 - 3}{-x} = -f(x)$
 Συνεπώς f περιττή

4) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

i) $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$ ii) $f_2(x) = 3|x| + 1$ iii) $f_3(x) = |x + 1|$
 iv) $f_4(x) = x^3 - 3x^5$ v) $f_5(x) = \frac{x^2}{1+x}$ vi) $f_6(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

i) $A = \mathbb{R}$
 για κάθε $x \in A$ και
 $-x \in A$
 $f(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 =$
 $= 3x^2 + 5x^4 = f(x)$
 f άρτια

iv) $A = \mathbb{R}$
 για κάθε $x \in A$
 και $-x \in A$
 $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 =$
 $= -x^3 + 3x^5 =$
 $= -f(x)$
 f περιττή

v) $A = \mathbb{R} - \{-1\}$
 αφού $1 \in A$
 και $-1 \notin A$
 ούτε άρτια
 ούτε περιττή

iii) $A = \mathbb{R}$
 για κάθε $x \in A$
 και $-x \in A$
 $f(-x) = |-x + 1| =$
 $= |-(x - 1)| = |x - 1|$
 ούτε άρτια
 ούτε περιττή

5) Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f_1(x) = \frac{1}{|x|}$ ii) $f_2(x) = \sqrt{x - 2}$ iii) $f_3(x) = |x - 1| - |x + 1|$
 iv) $f_4(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x^2 + 1}$ v) $f_5(x) = \sqrt{|x|}$ vi) $f_6(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

$$ii) \begin{aligned} x-2 &\geq 0 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

$$A = [2, +\infty)$$

$$2 \in A, -2 \notin A$$

ουτε αριθ
ουτε περιζη

$$iii) A = \mathbb{R} \text{ οτις για καθ } x \in A \text{ και } -x \in A$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x-1| - |-x+1| = |-(x+1)| - |-(x-1)| = \\ &= |x+1| - |x-1| = -f(x), \text{ } f \text{ περιζη} \end{aligned}$$

$$iv) \text{ Πριν } x^2+1 \neq 0 \text{ και } x \neq 0$$

$$x^2 \neq -1$$

ισχυει

$$A = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x + \frac{1}{-x}}{(-x)^2 + 1} = \frac{-(x + \frac{1}{x})}{x^2 + 1} = -f(x), \text{ } f \text{ περιζη} \end{aligned}$$

$$vi) \text{ Πριν } 1-x^2 \geq 0$$

$$x^2 \leq 1$$

$$|x| \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$A = [-1, 1] \text{ οτις για καθ } x \in A \text{ και } -x \in A$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x) \\ \text{'Αρα } f \text{ αριθ} \end{aligned}$$