

Ο αριθμός e

Μια Τράπεζα για να διαφημιστεί κάνει μια πολύ ειδική προσφορά. Όποιος καταθέσει την επόμενη μέρα ποσό 1 εκατομμυρίου ευρώ, αυτό θα τοκιστεί με ετήσιο επιτόκιο 100% και με δυνατότητα ανατοκισμού του 1, 2, 3, ... ή v φορές το χρόνο, σε ίσα χρονικά διαστήματα, ανάλογα με την επιθυμία του καταθέτη.

Έχει σημασία για τον καταθέτη το πόσες φορές το χρόνο θα ανατοκιστεί το κεφάλαιο:

Από το γνωστό τύπο του ανατοκισμού $\alpha_v = \alpha_0(1 + \tau)^v$, όπου $\tau = \frac{\epsilon}{100}$.

- για $v=1$, είναι $\tau=1$ και $\alpha_1 = 1(1+1)^1 = 2$ εκατομμύρια ευρώ.
- για $v=2$, είναι $\tau = \frac{1}{2}$ και $\alpha_2 = 1\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$ εκατομμύρια ευρώ.
- για $v=3$, είναι $\tau = \frac{1}{3}$ και $\alpha_3 = 1\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,44$ εκατομμύρια ευρώ.

-
- για $v=v$, είναι $\tau = \frac{1}{v}$ και $\alpha_v = 1\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ εκατομμύρια ευρώ.

Αν χρησιμοποιήσουμε υπολογιστή τσέπης κατασκευάζουμε τον πίνακα:

v	$\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ (ανά έτος)	$\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ (ανά εξάμηνο)	$\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ (ανά εποχή)	$\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ (ανά μήνα)	$\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ (ανά εβδομάδα)
$\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$	2	2,25	2,441406	2,613035	2,704813
	1000	10000	100000	1000000	
	2,716923	2,718145	2,718268	2,718280	

Παρατηρούμε ότι, καθώς το v αυξάνει, αυξάνει και το $\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ και προσεγγίζει έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και συμβολίζεται με e . Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στο μεγάλο Ελβετό, μαθηματικό Leonhard Euler (1707-1783). Ο αριθμός e με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων είναι $e = 2,71828$.

Συμβολικά γράφουμε
$$e = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$$

Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

Μία ακόμη εκθετική συνάρτηση με βάση το e είναι η

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct} \quad (1)$$

Αυτή εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t . Το Q_0 είναι η **αρχική τιμή** του Q (για $t = 0$) και είναι $Q_0 > 0$, ενώ το c είναι μια σταθερά που εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής**. Αν $c > 0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής αύξησης**, ενώ αν $c < 0$ η Q είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής απόσβεσης**. Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής αποτελεί ένα ικανοποιητικό μοντέλο για πάρα πολλές εφαρμογές της Φυσικής, της Βιολογίας, της Στατιστικής και άλλων επιστημών. Για παράδειγμα ο αριθμός των γραμμαρίων μιας ραδιενεργού ουσίας κατά τη χρονική στιγμή t (σε δευτερόλεπτα) δίνεται από τον τύπο $Q(t) = 200 \cdot e^{-0,3t}$. Αυτό σημαίνει ότι η ουσία που παραμένει αδιάσπαστη μετά από 7 δευτερόλεπτα είναι:

$$Q(7) = 200e^{-0,3 \cdot 7} \approx 200(2,718)^{-2,1} \approx 24,5 \text{ γραμμάρια.}$$

Ο χρόνος που χρειάζεται για να διαπιστωθεί ή να εξαφανισθεί η μισή ποσότητα μιας ραδιενεργού ουσίας λέγεται **ημιζωή** ή **χρόνος υποδιπλασιασμού** της ραδιενεργού ουσίας.

7. Το ραδιενεργό Ράδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 1600 χρόνια. Αν η αρχική ποσότητα είναι 5 γραμμάρια,

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση, η οποία δίνει την ποσότητα του

Ραδίου μετά από t χρόνια είναι $Q(t) = 5(0,5)^{\frac{t}{1600}}$

ii) να υπολογίσετε την ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά από 600 χρόνια με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων.

iii) να αποδείξετε ότι μετά από 20000 χρόνια μόλις 0,001 γραμμάρια θα έχουν απομείνει.

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$$

$$\text{ημιζωή } 1600 \rightarrow Q(1600) = \frac{Q_0}{2} \Rightarrow Q_0 \cdot e^{c \cdot 1600} = \frac{Q_0}{2} \Rightarrow e^{c \cdot 1600} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (e^c)^{1600} = 0,5 \xrightarrow{e^c > 0} e^c = \sqrt[1600]{0,5} = 0,5^{\frac{1}{1600}}$$

$$\text{ορίζω } Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct} = 5 \cdot (e^c)^t = 5 \cdot \left(0,5^{\frac{1}{1600}}\right)^t = 5 \cdot (0,5)^{\frac{t}{1600}}$$

$$\therefore Q(600) = 5 \cdot (0,5)^{\frac{600}{1600}} = 5 \cdot (0,5)^{3/8} \approx 3,7$$

$$Q(t) = 50 \cdot e^{-\frac{t}{1600}} = 50 \cdot e^{-\frac{t}{1600}}$$

$$i) Q(600) = 50 \cdot (0,5)^{\frac{600}{1600}} = 50 \cdot (0,5)^{3/8} \approx 31$$

$$ii) Q(20.000) = 50 \cdot (0,5)^{\frac{20.000}{1600}} = \dots = 0,001 \text{ g}$$

8. Ένας πωλητής αυτοκινήτων βεβαιώνει τους πελάτες του ότι η αξία ενός αυτοκινήτου 40.000 ευρώ ελαττώνεται κατά 15% το χρόνο στα πρώτα 6 χρόνια από την πώληση του.

- Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την τιμή του αυτοκινήτου μέσα στα 6 χρόνια.
- Να υπολογίσετε την τιμή του αυτοκινήτου στο τέλος του έκτου χρόνου.

$$\text{Μετά από 1 έτος τιμή} = 40.000 - \frac{15}{100} \cdot 40.000 = \frac{85}{100} \cdot 40.000 = 40.000 \cdot 0,85$$

$$\text{Μετά από 2 έτη τιμή} = 40.000 \cdot 0,85 \cdot 0,85 = 40.000 \cdot (0,85)^2$$

$$t \text{ έτη τιμή} = 40.000 \cdot (0,85)^t$$

$$6 \text{ έτη τιμή} = 40.000 \cdot (0,85)^6 \approx 15.000$$

6. Αν αφήσουμε το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου με βενζίνη ανοικτό, η βενζίνη εξατμίζεται με ρυθμό 20% ανά εβδομάδα.

- Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες.
- Να κάνετε τη γραφική της παράσταση
- Με τη χρήση υπολογιστή τσέπης να διαπιστώσετε ότι μετά 40 εβδομάδες μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.



$$Q(t) = (0,8)^t \cdot 5$$

$$Q(40) = (0,8)^{40} \cdot 5 = 0,0006 \text{ l}$$

