

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i)  $4^{1 - \frac{1}{2} \log_2 3}$

ii)  $9^{\frac{1}{2} \log_3 18 - 1}$

$$\boxed{a^{\log_a \theta} = \theta}$$

$$i) 4^{1 - \frac{1}{2} \log_2 3} = \frac{4^1}{4^{\frac{1}{2} \log_2 3}} = \frac{4}{(2^2)^{\frac{1}{2} \log_2 3}} = \frac{4}{2^{2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 3}} = \frac{4}{2^{\log_2 3}} = \frac{4}{3}$$

$$ii) 9^{\frac{1}{2} \log_3 18 - 1} = \frac{9^{\frac{1}{2} \log_3 18}}{9^1} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{2} \log_3 18}}{9} = \frac{3^{2 \cdot \frac{1}{2} \log_3 18}}{9} = \frac{3^{\log_3 18}}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

4. Να αποδείξετε ότι:  $\log \left( \log \underbrace{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\dots \sqrt[10]{10}}}}}_{v \text{ ριζικά}} \right) = -v$

$$\log_a a^x = x$$

$$\sqrt[v]{\sqrt[u]{a}} = \sqrt[v \cdot u]{a}$$

$$\sqrt[v]{a^u} = a^{\frac{u}{v}}$$

$$\begin{aligned} \log \left( \log \sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\dots \sqrt[10]{10}}} \right) &= \log \left( \log \sqrt[10^v]{10} \right) = \\ &= \log \left( \log 10^{\frac{1}{10^v}} \right) = \log \left( \frac{1}{10^v} \right) = \log 10^{-v} = -v \end{aligned}$$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\log \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \log \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \log \left( 1 - \frac{1}{4} \right) + \dots + \log \left( 1 - \frac{1}{v} \right) = -\log v$$

$$\begin{aligned} \log \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \log \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \log \left( 1 - \frac{1}{4} \right) + \dots + \log \left( 1 - \frac{1}{v} \right) &= \\ \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{v-1}{v} &= \log \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{v-1}{v} \right) = \\ \log \frac{1}{v} &= \log 1 - \log v = 0 - \log v = -\log v \end{aligned}$$

Τυπώ αλλαγή βάσης

Αν θεωρήσουμε γνωστό τον παρακάτω τύπο γνωστό ως τύπο αλλαγής βάσης

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}$$

όπου  $\theta > 0, \alpha, \beta > 0, \alpha, \beta \neq 1$

(χωρίς απόδειξη)

η x/  $\log_5 = \log_3$

$$\log_a 7 = \log_2 7$$

$$\log 7 = \ln 7$$

$$\log_2^{\log_3 \beta} = \frac{\log_3 5}{\log_3 2}, \quad \log_5 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 5} = \frac{\log 7}{\log 5} = \frac{\ln 7}{\ln 5}$$

να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log \dots}{\log \dots}$$

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\ln \dots}{\ln \dots}$$

$$\log \theta = \frac{\ln \dots}{\ln \dots}$$

$$\ln \theta = \frac{\log \dots}{\log \dots}$$

$$\log 5 = \frac{\ln 5}{\ln 10}$$

$$\ln 5 = \frac{\log 5}{\log e}$$

\*7. Να αποδείξετε ότι:

i)  $\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \alpha = 1$

ii)  $\log_{\alpha} \beta^2 \cdot \log_{\beta} \alpha^3 = 6$

iii)  $\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \gamma \cdot \log_{\gamma} \alpha = 1$

i)  $\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \alpha = \frac{\ln \beta}{\ln \alpha} \cdot \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} = 1$

ii)  $\log_{\alpha} \beta^2 \cdot \log_{\beta} \alpha^3 = 2 \cdot \log_{\alpha} \beta \cdot 3 \cdot \log_{\beta} \alpha = 6 \cdot \log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \alpha = 6 \cdot 1 = 6$

iii)  $\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \gamma \cdot \log_{\gamma} \alpha = \frac{\ln \beta}{\ln \alpha} \cdot \frac{\ln \gamma}{\ln \beta} \cdot \frac{\ln \alpha}{\ln \gamma} = 1$

\*8. Να αποδείξετε ότι:

i)  $\log_{\alpha} \theta + \log_{\frac{1}{\alpha}} \theta = 0$

$$\begin{aligned} \log_{\alpha} \theta + \log_{\frac{1}{\alpha}} \theta &= \frac{\ln \theta}{\ln \alpha} + \frac{\ln \theta}{\ln \frac{1}{\alpha}} = \frac{\ln \theta}{\ln \alpha} + \frac{\ln \theta}{\ln \alpha^{-1}} = \frac{\ln \theta}{\ln \alpha} + \frac{\ln \theta}{-\ln \alpha} = \\ &= \frac{\ln \theta}{\ln \alpha} - \frac{\ln \theta}{\ln \alpha} = 0 \end{aligned}$$

**1<sup>ο</sup>** Σύμφωνα με την κλίμακα Richter το μέγεθος  $R$  ενός σεισμού εντάσεως  $I$  δίνεται από τον τύπο  $R = \log \frac{I}{I_0}$

όπου  $I_0$  μια ορισμένη ελάχιστη ένταση.

i) Να βρεθεί το μέγεθος  $R$  ενός σεισμού που έχει ένταση  $I = 1000I_0$

ii) Να εκφρασθεί το  $I$  ως συνάρτηση του  $R$  και του  $I_0$

iii) Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση ενός σεισμού από την ένταση ενός άλλου σεισμού που είναι μικρότερος κατά 1 μονάδα Richter.

$$i) R = \log \frac{I}{I_0} = \log \frac{1000 I_0}{I_0} = \log 1000 = 3$$

$$ii) R = \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^R \Rightarrow \boxed{I = I_0 \cdot 10^R}$$

$$\begin{array}{l} iiii) \quad I \rightarrow R \\ \quad \quad I' \rightarrow R-1 \end{array} \quad \begin{array}{l} I = I_0 \cdot 10^R \\ I' = I_0 \cdot 10^{R-1} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} I \\ I' \end{array}} \right\} \Rightarrow \frac{I}{I'} = \frac{I_0 \cdot 10^R}{I_0 \cdot 10^{R-1}} \Rightarrow \frac{I}{I'} = 10 \Rightarrow \boxed{I = 10 \cdot I'}$$

δηλαδή ένας σεισμός μια μονάδα Richter μεγαλύτερος είναι 10 φορές πιο ισχυρός.