

Επίλυση εκθετικών εξισώσεων με τη βοήθεια λογαρίθμων

$3^x = 5$ $x = \log_3 5$	$5^x = 3$ $x = \log_5 3$	$10^x = 3$ $x = \log 3$	$e^x = 2$ $x = \ln 2$	$10^x = -1$ αδύνατη	$e^x = 0$ αδύνατη
-----------------------------	-----------------------------	----------------------------	--------------------------	------------------------	----------------------

$3^x < 5$ $3^x < 3^{\log_3 5}$ $x < \log_3 5$	$10^x > 2$ $10^x > 10^{\log 2}$ $x > \log 2$	$e^x > 3$ $e^x > e^{\ln 3}$ $x > \ln 3$	$5^x > -2$ $x \in \mathbb{R}$	$e^x < 2$ $e^x < e^{\ln 2}$ $x < \ln 2$	$e^x > -1$ $x \in \mathbb{R}$	$e^x \leq 0$ αδύνατη
---	--	---	----------------------------------	---	----------------------------------	-------------------------

Άσκηση 6 σελ. 57, 185

Να λύσεις τις εξισώσεις $5^x = 2^{1-x}$, $3^{x-1} = 2^{x+1}$

i) 1ος τρόπος $5^x = 2^{1-x}$ $5^x = \frac{2^1}{2^x}$ $5^x \cdot 2^x = 2$ $10^x = 2$ $x = \log 2$	2ος τρόπος $5^x = 2^{1-x}$ $\log 5^x = \log 2^{1-x}$ $x \log 5 = (1-x) \log 2$ $x \log 5 = \log 2 - x \log 2$ $x \log 5 + x \log 2 = \log 2$ $x (\log 5 + \log 2) = \log 2$ $x \cdot \log 10 = \log 2$ $x = \log 2$
--	--

ii) 1ος τρόπος

$$3^{x-1} = 2^{x+1}$$

$$\frac{3^x}{3^1} = 2^x \cdot 2^1$$

$$\frac{3^x}{2^x} = 3 \cdot 2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 6$$

$$x = \log_{\frac{3}{2}} 6$$

$x = \frac{\ln 6}{\ln \frac{3}{2}}$

2ος τρόπος

$$3^{x-1} = 2^{x+1}$$

$$\ln 3^{x-1} = \ln 2^{x+1}$$

$$(x-1) \ln 3 = (x+1) \ln 2$$

$$x \ln 3 - \ln 3 = x \ln 2 + \ln 2$$

$$x \ln 3 - x \ln 2 = \ln 2 + \ln 3$$

$$x (\ln 3 - \ln 2) = \ln 6$$

$$x \ln \frac{3}{2} = \ln 6$$

$x = \frac{\ln 6}{\ln \frac{3}{2}}$

Άσκηση

Να λύσεις την εξίσωση $3 \cdot 12^x = 9 \cdot 6^x$

Λύση

$$\frac{12^x}{6^x} = \frac{9}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{12}{6}\right)^x = 3 \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$$

$x = \log_2 3$

Άσκηση

Άσκηση

Να λυθεί η ορισμένη $3^{x-1} \leq 2^{x+1}$

Λύση

$$\frac{3^x}{3} \leq 2^x \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{3^x}{2^x} \leq 2 \cdot 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 6 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} 6}$$

$\frac{3}{2} > 1 \Leftrightarrow \boxed{x \leq \log_{\frac{3}{2}} 6}$

Άσκηση

Να λυθεί η ορισμένη $\frac{e^{2x}-3}{e^x-1} \geq 3$

Λύση

$$e^x - 1 \neq 0$$

$$e^x \neq 1$$

$$x \neq 0$$

$$\text{Θετω } e^x = w \text{ και } e^x w$$

$$\frac{w^2-3}{w-1} \stackrel{w-1}{-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{w^2-3-3w+3}{w-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{w^2-3w}{w-1} \geq 0$$

w	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
w^2-3w	+	0	-	-	+
$w-1$	-	-	0	+	+
$p(w)$	-	0	+	-	+

$$0 \leq w < 1 \quad \vee \quad w \geq 3$$

$$0 \leq e^x < 1 \quad \vee \quad e^x \geq 3$$

$$x < 0 \quad \vee \quad x \geq \ln 3$$

$$\text{Τελικά } x \in (-\infty, 0) \cup [\ln 3, +\infty)$$