

Αν $a > 1$, τότε αν $x_1 < x_2$, τότε $\log_a x_1 < \log_a x_2$

απ' όπου προκύπτει ότι:

($\log_a x < 0$, αν $0 < x < 1$) και ($\log_a x > 0$, αν $x > 1$)



Αν $0 < a < 1$, τότε

αν $x_1 < x_2$, τότε $\log_a x_1 > \log_a x_2$

απ' όπου προκύπτει ότι:

($\log_a x > 0$, αν $0 < x < 1$) και ($\log_a x < 0$, αν $x > 1$)



7. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

i) $\log_3 2$ και $\log_3 5$

ii) $\log_{0,3} 5$ και $\log_{0,3} 7$

iii) $\log(x^2 + 1)$ και $\log 2x$

i) $2 < 5 \xrightarrow{3 > 1} \log_3 2 < \log_3 5$ ii) $5 < 7 \xrightarrow{0,3 < 1} \log_{0,3} 5 > \log_{0,3} 7$

2° Να βρεθεί το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

Από την ανισότητα

$$\begin{aligned} 2 &> 1 \\ 2 \log 0,5 &\not\leq 1 \cdot \log 0,5 \\ \log 0,5^2 &\not\leq \log 0,5 \\ \log 0,25 &\not\leq \log 0,5 \\ 0,25 &\not\leq 0,5, \end{aligned}$$

παίρνουμε διαδοχικά:
 το λάθος είναι ότι όταν
 πολλαπλασιάζουμε με $\log 0,5 < 0$ δεν
 αλλάζει το πρόσημο
 που είναι άτοπο.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\log x^2 > (\log x)^2$

ii) $\log(x^2 - 4) < \log 3x$

iii) $x^{\log x} > 10$

i) Πρέπει $x^2 > 0$ και $x > 0$
 $x \neq 0$
 Τελικά $x > 0$
 $x^2 > 0$

ii) Πρέπει $x^2 - 4 > 0$ και $3x > 0$
 $x > 2$ ή $x < -2$ και $x > 0$
 Τελικά $x \in (2, +\infty)$
 $10 > 1$

iii) Πρέπει $x > 0$
 $x^{\log x} > 10 \Leftrightarrow$
 $\log x^{\log x} > \log 10 \Leftrightarrow$

Υποθέτουμε $x > 0$

$$2 \log x - (\log x)^2 > 0$$

Θέτουμε $\log x = w$ και έχουμε

$$2w - w^2 > 0$$

w	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$2w - w^2$	$-$	$+$	$+$	$-$

$$0 < w < 2$$

$$\log 1 < \log x < \log 100$$

$$\boxed{1 < x < 100}$$

Υποθέτουμε $x \in (2, +\infty)$

$$\log(x^2 - 4) < \log(3x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4 < 3x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$	$+$	$-$	$+$	$+$

$$-1 < x < 4$$

Όμως $x > 2$ οπότε

$$\text{τελικά } x \in (2, 4)$$

$x > 10 \Leftrightarrow$

$$\log x \cdot \log x > \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\log x \cdot \log x > 1 \Leftrightarrow$$

$$(\log x)^2 > 1 \Leftrightarrow$$

$$|\log x| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\log x > 1 \text{ ή } \log x < -1$$

$$x > 10 \text{ ή } 0 < x < \frac{1}{10}$$

$$\text{Τελικά } x \in (0, \frac{1}{10}) \cup (10, +\infty)$$

Άσκηση

Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{\ln x + 7}{\ln^2 x - 1} < \frac{1}{2}$$

Λύση

Πρέπει $x > 0$ και $\ln^2 x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln^2 x \neq 1 \Leftrightarrow \ln x \neq 1 \text{ και } \ln x \neq -1$
 $x \neq e \text{ και } x \neq \frac{1}{e}$

Θέτουμε $\ln x = w$ και έχουμε

$$\frac{w+7}{w^2-1} - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2w+14-w^2+1}{2(w^2-1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-w^2+2w+15}{2(w^2-1)} < 0$$

$$w < -3 \text{ ή } -1 < w < 1 \text{ ή } w > 5$$

$$\ln x < -3 \text{ ή } -1 < \ln x < 1 \text{ ή } \ln x > 5$$

$$0 < x < e^{-3} \text{ ή } \frac{1}{e} < x < e \text{ ή } x > e^5$$

w	$-\infty$	-3	-1	1	5	$+\infty$
$-w^2+2w+15$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
w^2-1	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
$P(w)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$

$$\text{Τελικά } x \in (0, \frac{1}{e^3}) \cup (\frac{1}{e}, e) \cup (e^5, +\infty)$$

7. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \log(xy) = 4 \log 2 \\ \log x \cdot \log y = 3(\log 2)^2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} xy = 8 \\ \log y = 2 \log x \end{cases}$ iii) $\begin{cases} y = 2x \\ 2 \log y = \log x + \log 2 \end{cases}$

i) $x > 0$ και $y > 0$

$$\log x + \log y = 4 \log 2$$

$$\log x \cdot \log y = 3(\log 2)^2$$

$$\begin{cases} \log x = \log 2 \\ \log y = 3 \log 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \log x = 3 \log 2 \\ \log y = \log 2 \end{cases}$$

$y > 0$ και $x > 0$

$$\begin{cases} xy = 8 \\ \log y = \log x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} xy = 8 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^3 = 8 \\ x = 2 \end{cases}$$

iii) $x > 0$ και $y > 0$

$$\begin{cases} y = 2x \\ \log y^2 = \log(2x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^2 = y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \log y = 3 \log 2 \\ x = 2 \\ y = 8 \end{array} \right\} \text{ in } \left. \begin{array}{l} \log y = \log 2 \\ x = 8 \\ y = 2 \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} x^3 = 8 \\ y = x^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \end{array} \right\} \text{ in } \left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = 0 \text{ in } y = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

in $(2, 4)$

in $(0, 0), (\frac{1}{2}, 1)$

in $(2, 8), (8, 2)$