

Έστω a ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας. Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.2, για κάθε $x > 0$ ορίζεται ο $\log_a x$. Επομένως, αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\log_a x$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \log_a x$$

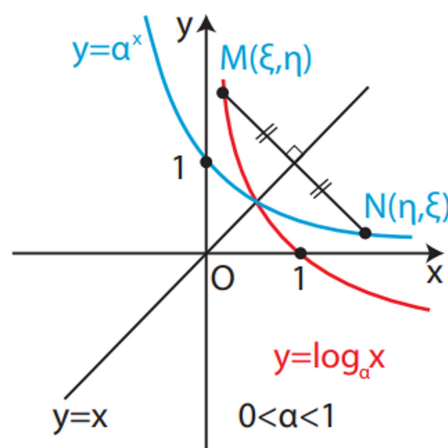
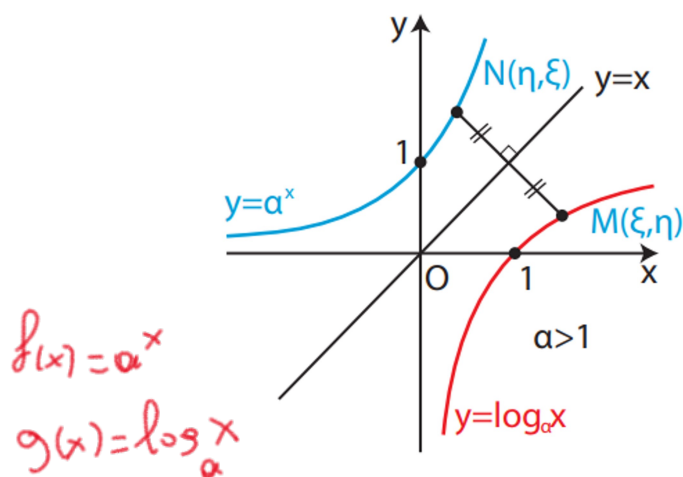
Η συνάρτηση αυτή λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση a** .

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y = \log_a x \text{ και } y = a^x$$

Είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

$\hookrightarrow y=x$



$$N(\eta, \xi) \in C_f \Leftrightarrow f(\eta) = \xi \Leftrightarrow a^\eta = \xi \Leftrightarrow \eta = \log_a \xi \Leftrightarrow \eta = g(\xi) \Leftrightarrow M(\xi, \eta) \in C_g$$

Αν $a > 1$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$:

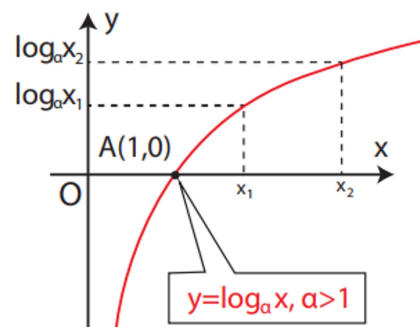
- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } \log_a x_1 < \log_a x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$(\log_a x < 0, \text{ αν } 0 < x < 1) \text{ και } (\log_a x > 0, \text{ αν } x > 1)$$

- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy' .



Αν $0 < a < 1$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$:

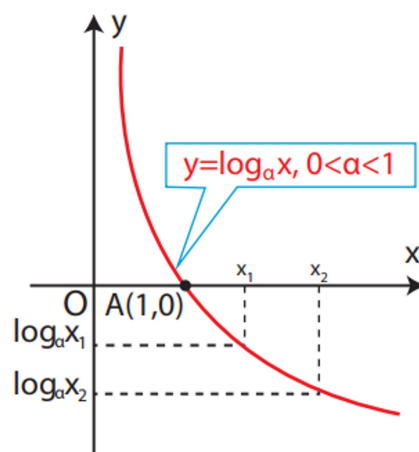
- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι:

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } \log_a x_1 > \log_a x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$(\log_a x > 0, \text{ αν } 0 < x < 1) \text{ και } (\log_a x < 0, \text{ αν } x > 1)$$

- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy' .

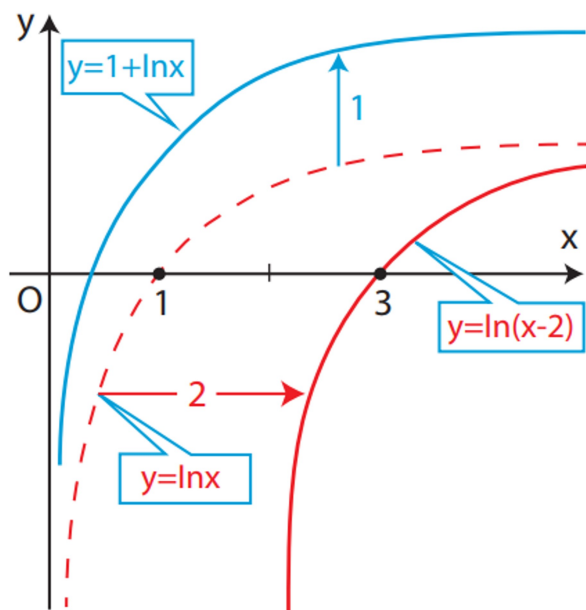


1^ο Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

i) $\varphi(x) = \ln x$

ii) $f(x) = \ln x + 1$

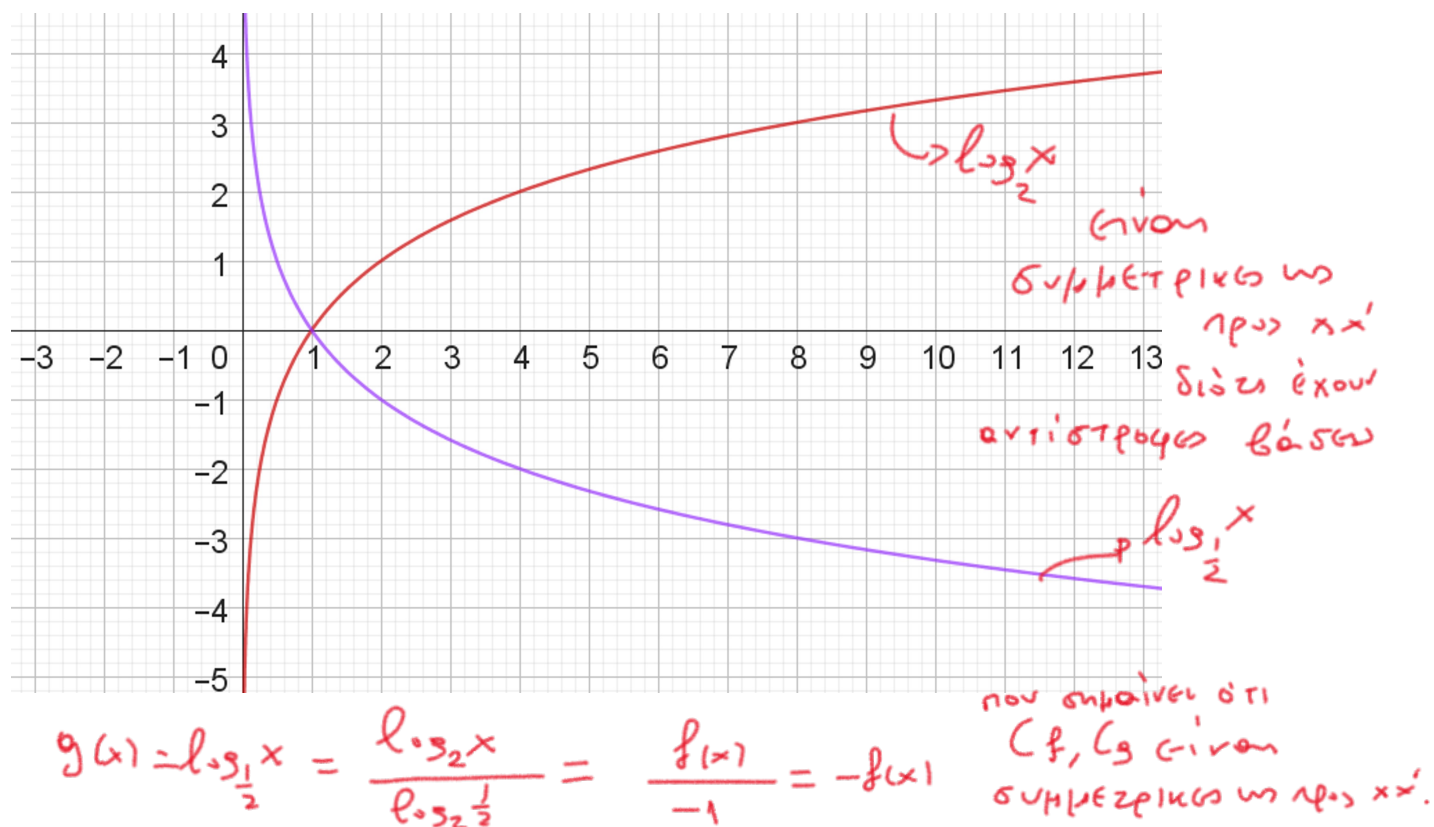
iii) $g(x) = \ln(x - 2)$



1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

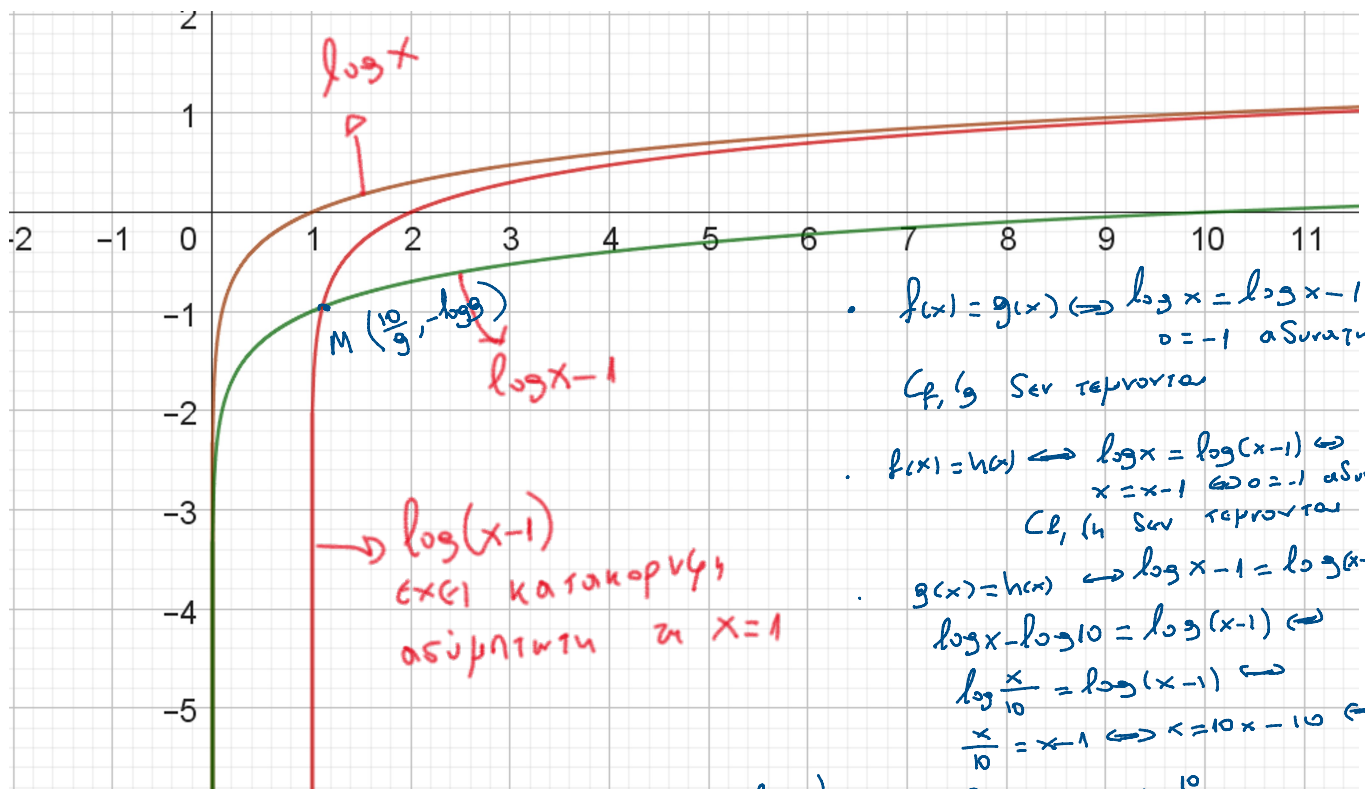
$$f(x) = \log_2 x \quad \text{και} \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Τι παρατηρείτε; Να δικαιολογήσετε την απάντηση.



2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \log x, \quad g(x) = \log x - 1 \quad \text{και} \quad h(x) = \log(x-1)$$



• $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log x = \log x - 1$
 $0 = -1$ αδυνατον
 C_f, C_g δεν τοποθετουν

• $f(x) = h(x) \Leftrightarrow \log x = \log(x-1) \Leftrightarrow$
 $x = x-1 \Leftrightarrow 0 = -1$ αδυνατον
 C_f, C_h δεν τοποθετουν

• $g(x) = h(x) \Leftrightarrow \log x - 1 = \log(x-1)$

$\log x - \log 10 = \log(x-1) \Leftrightarrow$

$\log \frac{x}{10} = \log(x-1) \Leftrightarrow$

$\frac{x}{10} = x-1 \Leftrightarrow x = 10x - 10 \Leftrightarrow$

$9x = -10 \Leftrightarrow x = -\frac{10}{9}$

$h(\frac{10}{9}) = \log(\frac{10}{9} - 1) = \log \frac{1}{9} = -\log 9$

Σημείο τομής των C_g, C_h το $M(\frac{10}{9}, -\log 9)$

εχει κατακορυφη
 ασυμπτωτη εν $x=1$