

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$

α) Πρέπει $\frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0 \iff \begin{matrix} e^x+5 > 0 \\ e^{2x}-1 > 0 \end{matrix} \iff e^{2x} > 1 \iff e^{2x} > e^0 \iff \begin{matrix} e^x > 1 \\ 2x > 0 \end{matrix} \iff x > 0 \quad A = (0, +\infty)$

$e^x \neq -5$
15 κέρ

β) $f(x) = 2\ln 2 \iff \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} = \ln 4 \iff \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} = 4 \iff e^{2x}-1 = 4e^x+20 \iff$

$e^{2x}-4e^x-21=0$. Θέτω $e^x=w$ οπότε $w^2-4w-21=0$

$w=7$ ή $w=-3$

$e^x=7$

$e^x=-3$ αδύνατη

$x=\ln 7$ δακτύ αφού $\ln 7 > 0$

γ) $f(x) > 0 \iff \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0 \iff \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > \ln 1 \xrightarrow{\ln \uparrow} \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 1 \iff \begin{matrix} e^x+5 > 0 \\ e^{2x}-1 > e^x+5 \end{matrix}$

$e^{2x}-1 > e^x+5 \iff e^{2x}-e^x-6 > 0$

Θέτω $e^x=w$, $w^2-w-6 > 0$

w	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
w^2-w-6	+	-	-	+

$w < -2$ ή $w > 3$

$e^x < -2$

$e^x > 3$

αδύνατη

$x > \ln 3 > 0$

Τελικά $x \in (\ln 3, +\infty)$

Θέμα 4°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{w^2-1}{w-3} > 0$

β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -\ln 3$.

α) $\frac{w^2-1}{w-3} > 0 \iff \begin{matrix} w \neq 3 \\ (w^2-1)(w-3) > 0 \end{matrix} \iff -1 < w < 1 \quad \text{ή} \quad w > 3$

w	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
w^2-1	+	-	+	+	+
$w-3$	-	-	-	+	+
$p(w)$	-	+	-	+	+

β) Πρέπει $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3} > 0$ Θέτω $e^x=w$ οπότε $\frac{w^2-1}{w-3} > 0$

$-1 < w < 1$ ή $w > 3$

β) Πρέπει $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3} > 0$ Θέτω $e^x = w$ οπότε $\frac{w^2-1}{w-3} > 0$

$$\begin{array}{l|l} -1 < w < 1 & \text{ή} & w > 3 \\ \hline -1 < e^x < 1 & & e^x > 3 \\ \text{ισχύει} & & e^x > e^{\ln 3} \\ e^x < e^0 & & x > \ln 3 \\ x < 0 & & \end{array}$$

Τελικά $A = (-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$

γ) $f(x) = -\ln 3 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x-3} = \ln 3^{-1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x-3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3e^{2x}-3 = e^x-3$

$3e^{2x}-e^x=0 \Leftrightarrow e^x(3e^x-1)=0 \Leftrightarrow e^x=0$ ή $3e^x-1=0$

αδύνατο

$e^x = \frac{1}{3}$
 $x = \ln \frac{1}{3}$ δακτύ αφού
 $\frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \ln \frac{1}{3} < 0$

Θέμα 5°

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = e^{-x}-1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των f και g .

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g διέρχονται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f και g .

δ) Με βάση τη μονοτονία των f και g να αποδείξετε αλγεβρικά ότι η εξίσωση

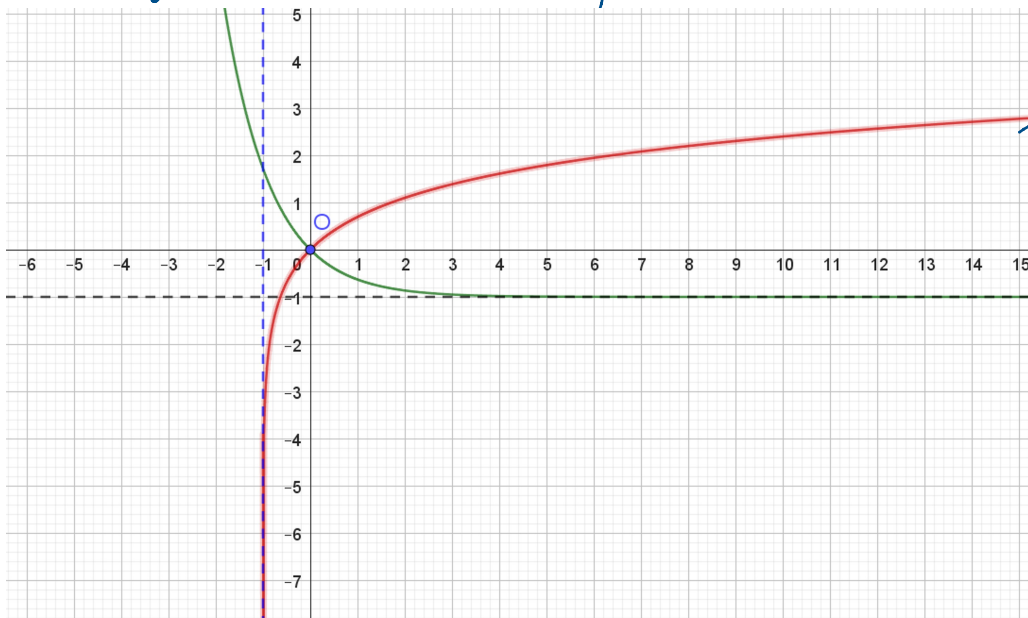
$f(x) = g(x)$ έχει μοναδική λύση τη $x=0$ και στη συνέχεια να το ερμηνεύσετε

γραφικά.

α) $f(x) = \ln(x+1)$
 Πρέπει $x+1 > 0$
 $x > -1$
 $A_f = (-1, +\infty)$

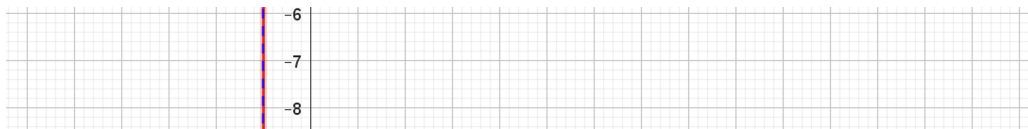
$g(x) = e^{-x}-1$
 $x \in \mathbb{R}$
 $A_g = \mathbb{R}$

β) $f(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$ οπότε $(0,0) \in f$
 $g(0) = e^0-1 = 1-1 = 0$ οπότε $(0,0) \in g$



$f(x) = \ln(x+1)$
 έχει ασύμπτωτη
 την $x = -1$

$g(x) = e^{-x}-1$
 έχει ασύμπτωτη
 την $y = -1$



$$\text{b) } \text{για } x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 1 \xrightarrow{\ln} \ln(x+1) > \ln 1 \Rightarrow f(x) > 0 \\ -x < 0 \xrightarrow{e^x} e^{-x} < e^0 \Rightarrow e^{-x} - 1 < 1 - 1 \Rightarrow g(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$$\text{για } x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 < 1 \xrightarrow{\ln} \ln(x+1) < \ln 1 \Rightarrow f(x) < 0 \\ -x > 0 \xrightarrow{e^x} e^{-x} > e^0 \Rightarrow e^{-x} - 1 > 1 - 1 \Rightarrow g(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) < g(x)$$

$f(0) = g(0) = 0$ Άρα $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0$ που γραφικά σημαίνει
ότι f, g έχουν κοινό σημείο και το $O(0,0)$.