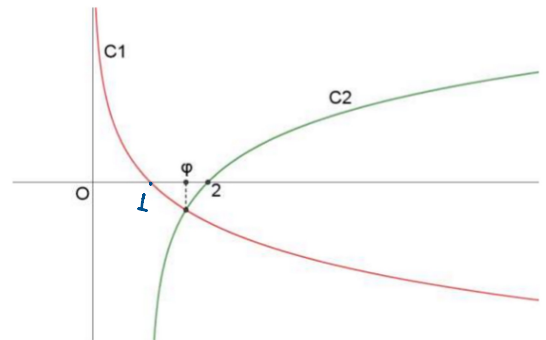


Μάθημα 73ο -Επαναληπτικά θέματα από τράπεζα

Θέμα 6°

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες C_1, C_2 οι οποίες έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη ϕ , ενώ η C_2 τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο με τετμημένη 2. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = -\ln x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις είναι οι C_1, C_2 . Να αποδείξετε ότι:



α) η γραφική παράσταση της f είναι η C_1 ενώ η γραφική παράσταση της g είναι η C_2 .

β) $0 < \ln \phi < 1$

γ) $2 \ln 2 = \ln(\sqrt{5}+1) + \ln(\sqrt{5}-1)$

δ) $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$\alpha) f(2) = \ln 1 = 0 \\ (2, 0) \in C_f \rightarrow C_f \equiv C_1$$

$$\text{οπότε } C_g \equiv C_2$$

$$\beta) g(x) = 0 \\ -\ln x = 0 \\ \ln x = 0 \\ x = 1$$

$$\text{οπότε } 1 < \phi < 2 < e \xrightarrow{\ln \uparrow} \\ \ln 1 < \ln \phi < \ln e \rightarrow \\ \boxed{0 < \ln \phi < 1}$$

$$\gamma) \ln(\sqrt{5}+1) + \ln(\sqrt{5}-1) = \\ \ln((\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)) = \ln(\sqrt{5}^2 - 1^2) = \\ = \ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$$

$$\delta) C_f, C_g \text{ τέμνονται σε σημείο με τετμημένη } \phi \text{ οπότε } \phi \text{ είναι η λύση της εξίσωσης } f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(x-1) = -\ln x \Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln x^{-1} \Leftrightarrow \\ x-1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ \Delta = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ δεκτή} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ απορ} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ΘΕΜΑ 4.1

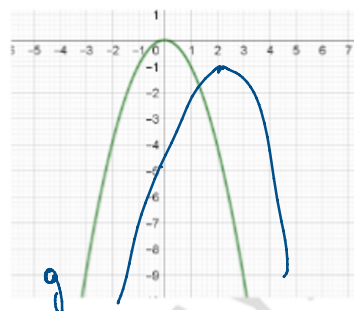
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-2)^2 - 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq -1$ και να βρείτε για ποια τιμή του x είναι $f(x) = -1$.

γ) Να αιτιολογήσετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο το οποίο και να προσδιορίσετε.

δ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $g(x) = -x^2$. Με βάση αυτή να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .



$$\alpha) f(x) = -(x^2 - 4x + 5) = \\ = -(x^2 - 4x + 4 + 1) = \\ = -[(x-2)^2 + 1] = \\ = -(x-2)^2 - 1$$

$$\beta) f(x) \leq -1 \Leftrightarrow -(x-2)^2 - 1 \leq -1 \Leftrightarrow \\ -(x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

γ) $f(x) \leq f(2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ που σημαίνει η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$ το $f(2) = -1$

Η C_f είναι είναι μετατόπιση ως C_g 2 μονάδες δεξιά και 1 μονάδα κάτω.

ΘΕΜΑ 4.2

ΘΕΜΑ 4.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x$. Έστω επίσης g συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της f ως προς την ευθεία (ε) .

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

β) Να γράψετε τον τύπο της g και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

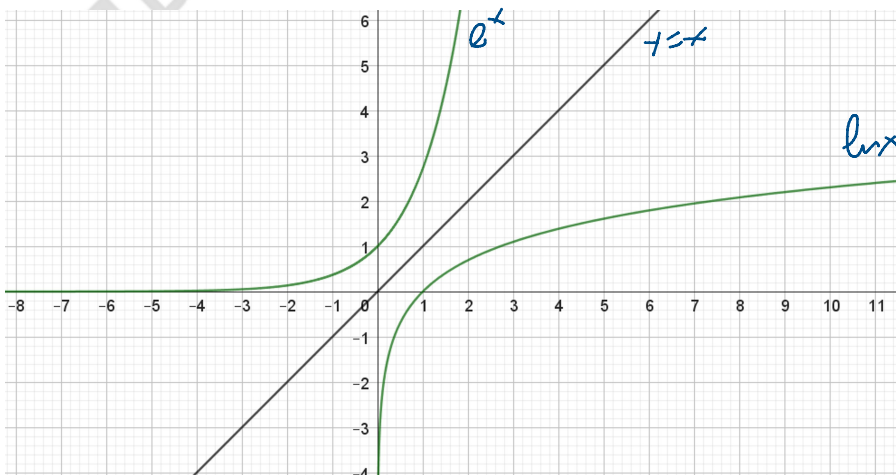
γ) Να αποδείξετε ότι σημείο $(2, f(\ln 2))$ είναι πάνω στην ευθεία (ε) .

$$\theta) g(x) = \ln x$$

$$A_g = (0, +\infty)$$

$$\gamma) \text{ Αν } f(\ln 2) = 2$$

$$\text{Είαν } f(\ln 2) = e^{\ln 2} = 2$$



ΘΕΜΑ 4.3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + \kappa$ στο $[0, \pi]$ όπου $\rho > 0, \omega > 0$, η οποία έχει περίοδο $T = \pi$, διέρχεται από το σημείο $(\pi, -1)$ και έχει μέγιστο το 2.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3\eta\mu(2x) - 1$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $[0, \pi]$.

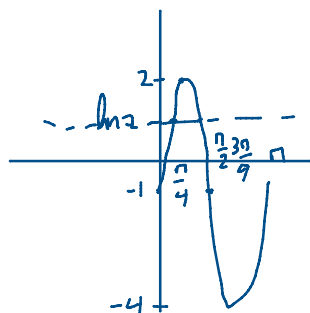
γ) Να αποδείξετε ότι $0 < \ln 2 < 1$ και να αιτιολογήσετε γραφικά ότι η εξίσωση $f(x) = \ln 2$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $[0, \pi]$.

$$\theta) T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \pi \cdot \omega = 2\pi \Rightarrow \boxed{\omega = 2}$$

$$(\pi, -1) \in \mathcal{C}_f \Rightarrow f(\pi) = -1 \Rightarrow \rho \cdot \psi_2\pi + \kappa = -1 \Rightarrow \boxed{\kappa = -1}$$

$$\mu\epsilon\chi\iota\sigma\tau\omicron \pi \rho = 1\rho + \kappa \Rightarrow 1\rho + \kappa = 2 \xrightarrow[\kappa = -1]{\rho > 0} \rho - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{\rho = 3}$$

$$\text{Συνεπώς } f(x) = 3 \cdot \psi_2(2x) - 1$$



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	-1	2	-1	-4	-1

$$\gamma) 1 < 2 < e \xrightarrow{\ln} \ln 1 < \ln 2 < \ln e \Rightarrow 0 < \ln 2 < 1$$

δ) η ευθεία $y = \ln 2$ τέμνει το $\mathcal{C}_f$ στο $[0, \pi]$ ακριβώς 2 φορές οπότε η εξίσωση $f(x) = \ln 2$ έχει ακριβώς 2 ρίζες