ΘΕΜΑ 4.4

Να αιτιολογήσετε ότι

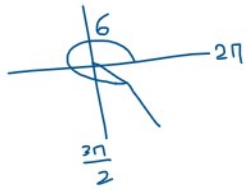
α) $6 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

β) ορίζεται ο αριθμός $\ln(\sigma\upsilon\nu 6)$ και είναι $\ln(\sigma\upsilon\nu 6) < 0$.

γ) για κάθε γωνία $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ δεν ορίζεται η παράσταση $\ln(\sigma\upsilon\nu\theta)$ ενώ ορίζεται η παράσταση $\ln(\eta\mu\theta)$ και είναι $\ln(\eta\mu\theta) < 0$.

α) $\pi \simeq 3,14 \Rightarrow 3 < \pi < 4 \xRightarrow{\cdot 2} 6 < 2\pi < 8$, $\xRightarrow{\cdot \frac{3}{2}} \frac{9}{2} < \frac{3\pi}{2} < 6$ $\Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi \Rightarrow$ συν6 > 0

συν6 ≠ 1



β) Αφού συν6 > 0 ⇒ ln(συν6) ορίζεται

συν6 ≠ 1 ⇒ συν6 < 1 ⇒ ln(συν6) < 0

γ) $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\theta < 0 \Rightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu\theta) \text{ δεν ορίζεται} \\ 0 < \eta\mu\theta < 1 \Rightarrow \ln\eta\mu\theta < \ln 1 \Rightarrow \ln\eta\mu\theta < 0 \end{cases}$

ΘΕΜΑ 4.6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{1 - e^{2x}}$ και $g(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \ln 4$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^2 - 3\omega + 2}{1 - \omega^2} > 0$ είναι το $(-1,1) \cup (1,2)$.

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, \ln 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln 2e^x$.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g.

α) $w^2 - 3w + 2 = 0$, $w = 1, w = 2$ $\quad 1 - w^2 = 0$, $w = 1, w = -1$

w	$-\infty$ -1		1		2 $+\infty$
w^2-3w+2	+	+	0	−	0 +
$1-w^2$	−	0 +	0	−	−
$f(w)$	−	+		+	0 −

$w \in (-1, 1) \cup (1, 2)$

β) Πρέπει $\frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{1 - e^{2x}} > 0$ και $1 - e^{2x} \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Θέτω $e^x = w$, $\frac{w^2 - 3w + 2}{1 - w^2} > 0 \Rightarrow -1 < w < 1$ ή $1 < w < 2$

$-1 < e^x < 1$ $\quad 1 < e^x < 2$

$x < 0$ $\quad 0 < x < \ln 2$

Συνεπώς $A_f = (-\infty, 0) \cup (0, \ln 2)$

γ) $g(x) = x + \frac{1}{2}\ln 4 = \ln e^x + \ln 4^{1/2} = \ln e^x + \ln\sqrt{4} = \ln e^x + \ln 2 = \ln(2e^x)$

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων C_f, C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln\frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{\ldots} = \ln(2e^x)$, $x \in A_f$

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων ...

Επίλυση $f(x)=g(x) \iff \ln \dfrac{e^{2x}-3e^x+2}{1-e^{2x}} = \ln(2e^x)$, $x \in A_f$

$$\iff \frac{e^{2x}-3e^x+2}{1-e^{2x}} = 2e^x \iff e^{2x}-3e^x+2 = 2e^x - 2e^{3x} \iff$$

$$2e^{3x}+e^{2x}-5e^x+2=0$$

Θέτω $e^x = w$ και έχω $2w^3+w^2-5w+2=0$

2	1	−5	2	1
	2	3	−2	
2	3	−2	0	

$(w-1)(2w^2+3w-2)=0$

$w=1$ ή $w=-2$ ή $w=\frac{1}{2}$

$e^x=1$, $e^x=-2$ αδύνατη , $e^x=\frac{1}{2}$

$x=0$ απορρίπτεται , $x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2<0$ δεκτή

$$g\left(\ln\tfrac{1}{2}\right) = \ln\left(2e^{\ln\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(2\cdot\tfrac{1}{2}\right) = \ln 1 = 0$$

Συνεπώς μοναδικό κοινό σημείο το $(-\ln 2, 0)$

ΘΕΜΑ 4.7

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες C_1, C_2 οι οποίες έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη κ, ενώ η C_1 τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο με τεταγμένη 2.

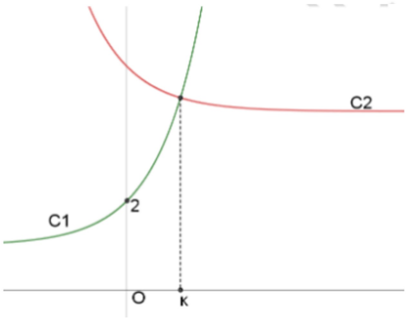
Έστω επίσης οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+1$ και $g(x)=e^{-x}+4$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις είναι οι C_1, C_2. Να αποδείξετε ότι:

α) η γραφική παράσταση της f είναι η C_1 ενώ η γραφική παράσταση της g είναι η C_2.

β) $e^{2\kappa}-3e^{\kappa}-1=0$.

γ) $f(\kappa)<g(0)$.

δ) $\kappa<\ln 4$.



α) $f(0)=e^0+1=1+1=2$

οπότε $(0,2)\in C_f \Rightarrow C_f \equiv C_1$

και άρα $C_g \equiv C_2$

β) C_f, C_g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $\kappa \Rightarrow$

$f(\kappa)=g(\kappa) \iff e^{\kappa}+1=e^{-\kappa}+4 \iff$

$e^{\kappa}+1=\frac{1}{e^{\kappa}}+4 \iff e^{2\kappa}+e^{\kappa}=1+4\cdot e^{\kappa}$

$\iff e^{2\kappa}-3e^{\kappa}-1=0$

γ) $f(\kappa)<g(0) \iff g(\kappa)<g(0) \overset{g\downarrow}{\iff} \kappa>0$ που ισχύει

δ) $f(\kappa)<g(0) \Rightarrow e^{\kappa}+1<e^0+4 \Rightarrow e^{\kappa}+1<1+4 \Rightarrow e^{\kappa}<4 \Rightarrow \kappa<\ln 4$