

ΘΕΜΑ 4.8

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

$P(x) : (x-1).$

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1)$.

γ) $\frac{1}{2} < \sin \theta < 1$ για κάθε γωνία $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$.

δ) $P(\sin \theta) < 0$ για κάθε γωνία $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 & -1 & \\ \hline 2 & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$\delta) 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$
 $\xrightarrow{\sin}$
 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
 $\sin 0 > \sin \theta > \sin \frac{\pi}{3}$
 $1 > \sin \theta > \frac{1}{2}$
 $\delta) \text{ Αφού } \frac{1}{2} < \sin \theta < 1$
 $P(\sin \theta) < 0$

α) $P(x) = (x-1)(2x^2+x-1)$

β)

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$		-	-	-	+
$2x^2+x-1$		+	0	-	+
$P(x)$		-	0	+	+

$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1)$

ΘΕΜΑ 4.9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

$P(x) : (x-1).$

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

γ) $1 < \log 20 < 2$.

δ) $P(\log 20) < 0$.

α)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ & 1 & -1 & -2 & \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

β)

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x-1$		-	-	0	+
x^2-x-2		+	0	-	+
$P(x)$		-	+	-	+

$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$

$P(x) = (x-1)(x^2-x-2)$

$\gamma) 10 < 20 < 100 \xrightarrow{\log \uparrow}$
 $\log 10 < \log 20 < \log 100 \Rightarrow$
 $1 < \log 20 < 2$

$\delta) \text{ Αφού } \log 20 \in (1, 2) \Rightarrow$
 $P(\log 20) < 0$

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$$

$$P(\log 20) < 0$$

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α .

β) Για $\alpha = 15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

$$\alpha) P(1) = 0 \Rightarrow 2 - 9 + \alpha - 2 - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 15}$$

$$\beta) P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 \\ - 2x^3 + 6x^2 - 4x \\ \hline -3x^2 + 9x - 6 \\ 3x^2 - 9x + 6 \\ \hline 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \\ 2x - 3 \end{array} \right\}$$

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$$

$$\gamma)$$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	-0	+
$2x - 3$	-	-	0	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$\delta) \quad 2 < e \xRightarrow{\ln \uparrow} \ln 2 < \ln e \Rightarrow \ln 2 < 1 \Rightarrow P(\ln 2) < 0$$

ΘΕΜΑ 16ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2})$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi+\theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta \neq 0$.

α) Πρέπει $x \neq 0$. $A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

β) για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$
 $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{-x} = -f(x), x \in A_f \quad \left| \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ περιζών} \Rightarrow C_f \\ \text{συμμετρική ως προς } (0,0) \end{array} \right.$

γ) $f(\ln \frac{1}{2}) = f(\ln 2^{-1}) = f(-\ln 2) \stackrel{f \text{ περιζών}}{=} -f(\ln 2) \Rightarrow$

$f(\ln \frac{1}{2}) = -f(\ln 2) \Rightarrow f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2}) = 0$

δ) $\eta\mu(\pi+\theta) = -\eta\mu\theta$ οπότε $f(\eta\mu(\pi+\theta)) = f(-\eta\mu\theta) \stackrel{f \text{ περιζών}}{=} -f(\eta\mu\theta) \Rightarrow$
 $f(\eta\mu(\pi+\theta)) + f(\eta\mu\theta) = 0$