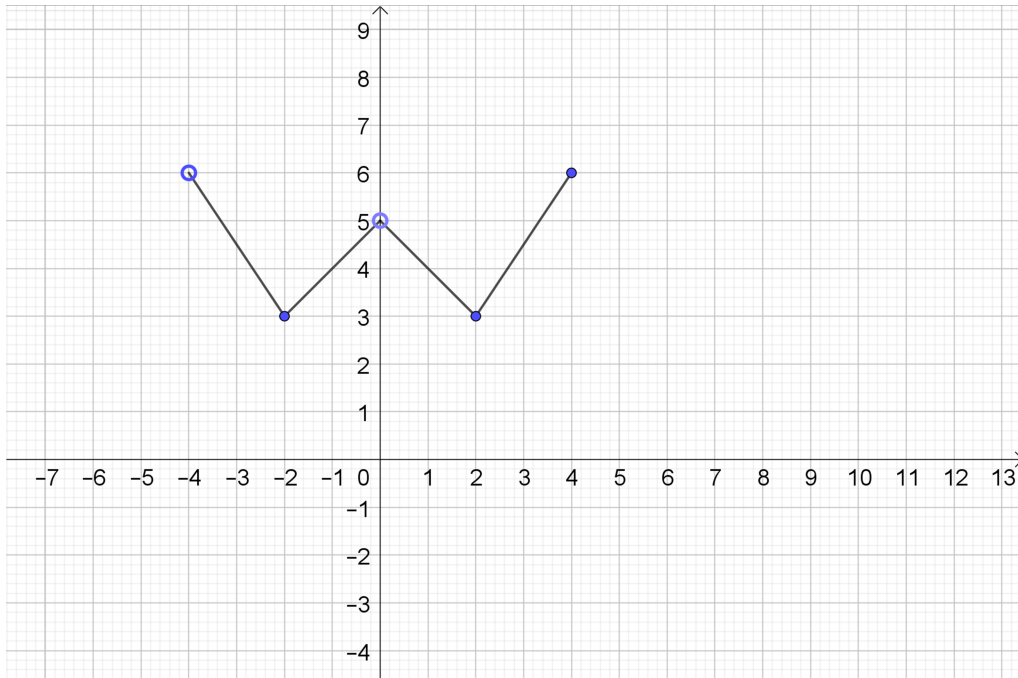


Μάθημα 9ο - Μονοτονία - ακρότατα

Θέμα 2ο

Για τη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω, να βρείτε πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή, να βρείτε τα διαστήματα και το είδος μονοτονίας, να εξετάσετε αν έχει και να βρείτε τις ακρότατες τιμές καθώς και τις θέσεις ακροτάτων. Τέλος να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$ για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$.



$$A = (-4, 0) \cup (0, 4]$$

$$f(A) = [3, 6]$$

$$f \downarrow (-4, -2]$$

$$f \uparrow [-2, 0)$$

$$f \downarrow (0, 2]$$

$$f \uparrow [2, 4]$$

Αφού $4 \in A$ και $-4 \notin A$
ούτε άρτια ούτε
περιττή

ελάχιστο το 3 για $x = -2$ ή $x = 2$

μέγιστο το 6 για $x = -4$

από τις ριζών της $f(x) = k$

Αν $k > 6$ καμία ρίζα

Αν $k = 6$ μία ρίζα το 4

Αν $5 \leq k < 6$ 2 ρίζες

Αν $3 < k < 5$ 4 ρίζες

Αν $k = 3$ 2 ρίζες

Αν $k < 3$ καμία ρίζα

Θέμα 3^ο Ερωτήσεις διάταξης

Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $[-3, 3]$. Η συνάρτηση αυτή είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$. Να συμπληρώσετε το κατάλληλο σύμβολο $<, =, >$ στα παρακάτω κενά.

$$f(2) > f(1) \quad , \quad f(-2) > f(0) \quad , \quad f(-2) = f(2) \quad , \quad f(-1) < f(-2) \quad ,$$

$$f(0) < f(2) \quad , \quad f(-3) = f(3) \quad , \quad f(-2) < f(3) \quad , \quad f(-3) > f(2)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) < f(3) \\ f(-2) = f(2) \\ f(-3) = f(3) \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) < f(-3)$$

$$f \uparrow [0, 3] \quad 1 < 2 \Rightarrow f(1) < f(2)$$

$$f \downarrow [-3, 0] \quad -2 < 0 \Rightarrow f(-2) > f(0)$$

$$f \text{ άρτια} \Rightarrow f(-2) = f(2)$$

$$f \downarrow [-3, 0] \quad -1 > -2 \Rightarrow f(-1) < f(-2)$$

$$f \uparrow [0, 3] \quad 0 < 2 \Rightarrow f(0) < f(2)$$

$$f \text{ άρτια} \Rightarrow f(-3) = f(3)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = f(2) \\ 2 < 3 \Rightarrow f(2) < f(3) \end{array} \right\} f(-2) < f(3)$$

Θέμα 6^ο

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(3, 7)$, $B(1, 3)$ και ισχύει $|f(x) - 5| \leq 2$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της, να αποδείξετε ότι έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή τις οποίες και να βρείτε.

$$A(3, 7) \in f \Rightarrow f(3) = 7 \quad \text{α)} \quad$$

$$B(1, 3) \in f \Rightarrow f(1) = 3 \quad \text{β)} \quad$$

$$|f(x) - 5| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq f(x) - 5 \leq 2 \xrightarrow{+5} 5 - 2 \leq f(x) - 5 + 5 \leq 2 + 5 \Leftrightarrow$$

$$3 \leq f(x) \leq 7 \xrightarrow[\text{β)}]{\text{α)}} f(1) = f(x) = f(3)$$

οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=3$ το $f(3)=7$
και ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=3$

Θέμα 4^ο

Α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = -3|x-2| + 5$ έχει μέγιστη τιμή το 5.

$$\text{Α.ν.Σ.ν.} \quad f(x) \leq 5 \quad \text{και} \quad 5 \in f(A)$$

$$\text{Είναι} \quad f(x) \leq 5 \Leftrightarrow -3|x-2| + 5 \leq 5 \Leftrightarrow -3|x-2| \leq 0 \Leftrightarrow |x-2| \geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

$$\text{Επίσης} \quad f(2) = 5 \rightarrow 5 \in f(A)$$

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο το 5 για $x=2$

B) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 9$ έχει ελάχιστη τιμή το 5.

$$\text{A.v.S.} \quad f(x) \geq 5 \quad \text{και} \quad 5 \in f(A)$$

$$\text{Γινon} \quad f(x) \geq 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 9 \geq 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$$

και ισως

$$\text{Γινon} \quad f(2) = 5 \Rightarrow 5 \in f(A)$$

Απο η f παρουσιάζει ελάχιστο το 5 για $x=2$