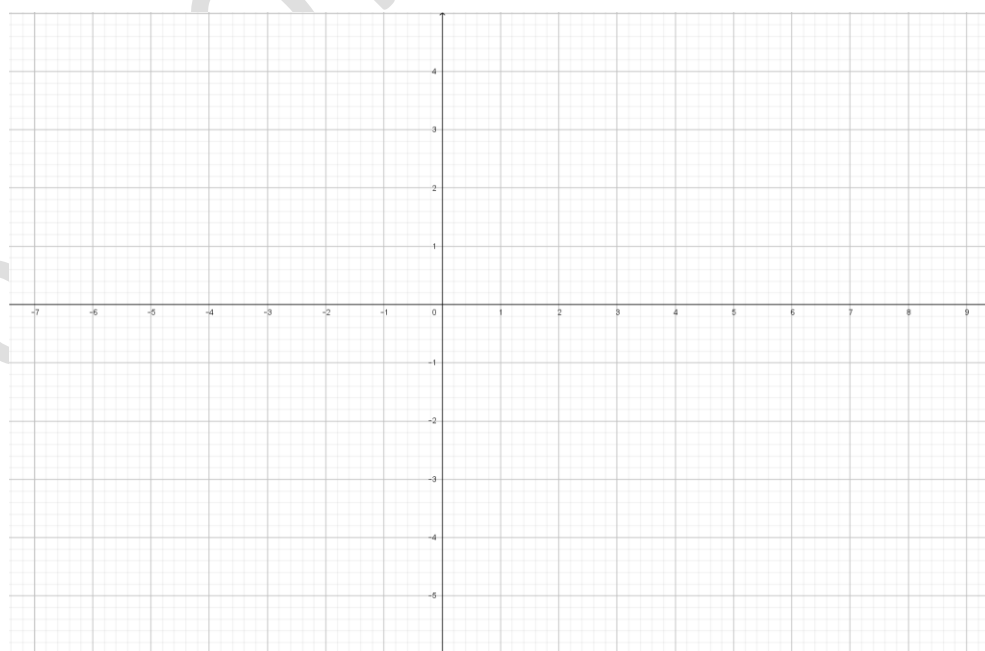


Φύλλο εργασίας 1

Μάθημα : Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο : Γραμμική εξίσωση - Συστήματα γραμμικών εξισώσεων 2×2 –
Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2×2 Ορισμός

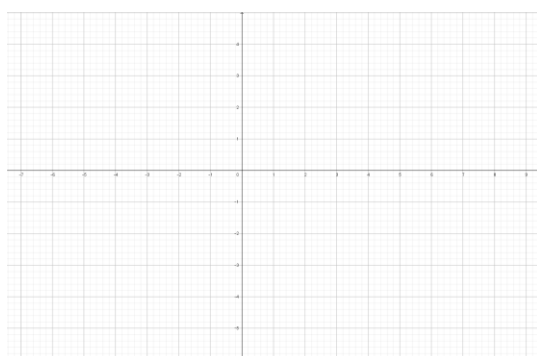
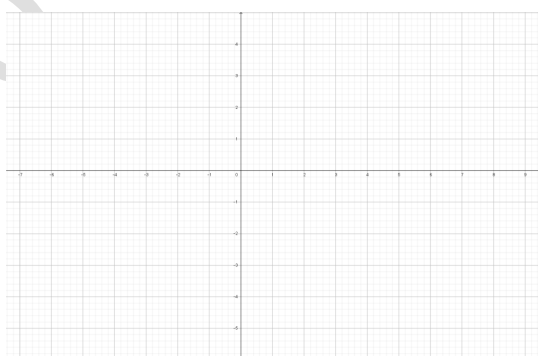
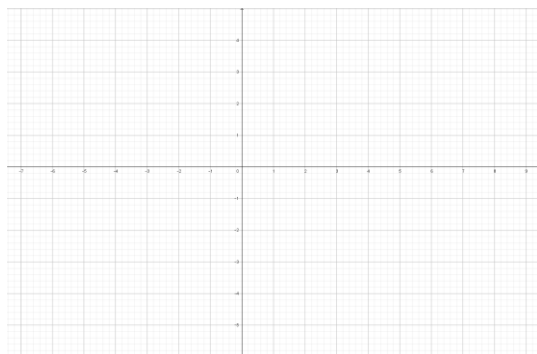
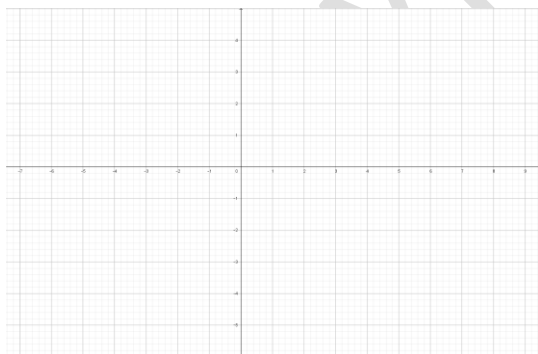
- Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ λέγεται γραμμική εξίσωση και παριστάνει μία ευθεία γραμμή.
- Λύση μιας τέτοιας εξίσωσης λέγεται κάθε ζεύγος τιμών (x_0, y_0) που την επαληθεύει, δηλαδή αν βάλουμε στη θέση του x το x_0 και στη θέση του y το y_0 θα προκύψει ισότητα που αληθεύει.
- Αν παραστήσουμε όλα τα ζεύγη που αποτελούν λύση μιας τέτοιας εξίσωσης με σημεία πάνω στο επίπεδο, θα δούμε ότι βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, για αυτό και λέμε ότι παριστάνει μια ευθεία γραμμή.

Άσκηση 1 Δίνεται η εξίσωση $3x + 2y = 8$ (1).α) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω ζεύγη αποτελούν λύση της εξίσωσης (1)
 $(2,1)$, $(1,2)$, $(3,-2)$, $(0,4)$, $(8/3,0)$.β) Να παραστήσετε τα ζεύγη αυτά με σημεία στο επίπεδο και να σχεδιάσετε την ευθεία $3x + 2y = 8$.

- Αν $\beta \neq 0$ τότε $\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow \beta y = -\alpha x + \gamma \Leftrightarrow y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$ και παριστάνει ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ που τέμνει τον γγ' στο $\frac{\gamma}{\beta}$.
- Αν $\beta = 0$ τότε $\alpha \neq 0$ και η εξίσωση γίνεται $\alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\alpha}$ που παριστάνει μια ευθεία παράλληλη στον γγ' που τέμνει τον κκ' στο $\frac{\gamma}{\alpha}$ και δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης. Έτσι ο γγ' έχει εξίσωση $x = 0$.
- Αν $\alpha = 0$ τότε $\beta \neq 0$ και η εξίσωση γίνεται $\beta y = \gamma \Leftrightarrow y = \frac{\gamma}{\beta}$ που παριστάνει μια ευθεία παράλληλη στον κκ' που τέμνει τον γγ' στο $\frac{\gamma}{\beta}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης είναι 0. Έτσι ο κκ' έχει εξίσωση $y = 0$.
- Αν $\gamma = 0$ τότε η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων (0,0).

Άσκηση 2

Να παραστήσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις παρακάτω ευθείες και να βρείτε τα σημεία τομής της καθεμιάς με τους άξονες κκ', γγ' και το συντελεστή διεύθυνσης: $\varepsilon_1: 3x - 2y = 8$, $\varepsilon_2: 3x = 9$, $\varepsilon_3: -2y = 8$, $\varepsilon_4: 3x - 4y = 0$



Ορισμός

Δύο ή περισσότερες γραμμικές εξισώσεις τις οποίες τις εξετάζουμε ως προς τις κοινές τους λύσεις λέμε ότι αποτελούν ένα σύστημα .

Έτσι ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους 2×2 είναι της

μορφής : $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ όπου οι x, y είναι οι άγνωστοι, οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$

λέγονται συντελεστές των αγνώντων και οι αριθμοί γ_1, γ_2 λέγονται σταθεροί όροι.

- Λύση ενός τέτοιου συστήματος λέγεται κάθε ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις .
- Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει :

1. **Μία λύση** .
2. **Καμία λύση** και λέγεται **αδύνατο** .
3. **Άπειρες λύσεις** και λέγεται **αόριστο** .

Άσκηση 3 Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν κάποιο από τα παρακάτω ζεύγη αποτελεί λύση του συστήματος : $(0,4)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2×2

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε το σύστημα : $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$

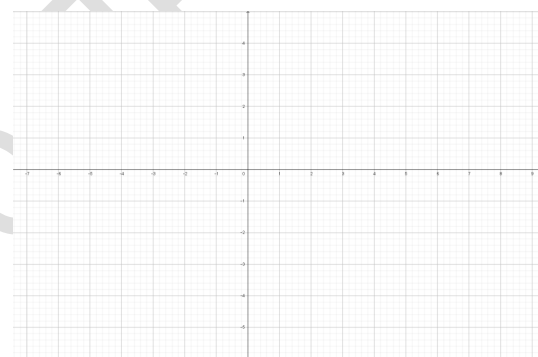
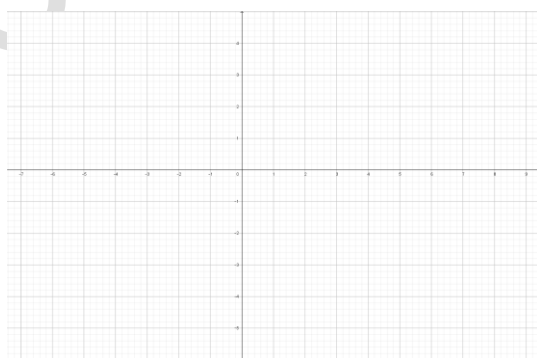
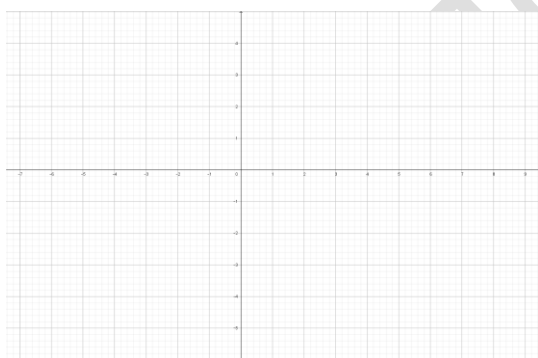
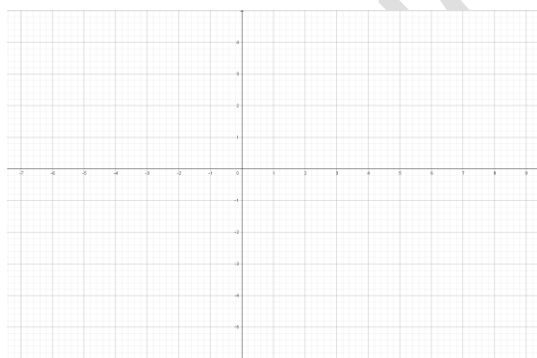
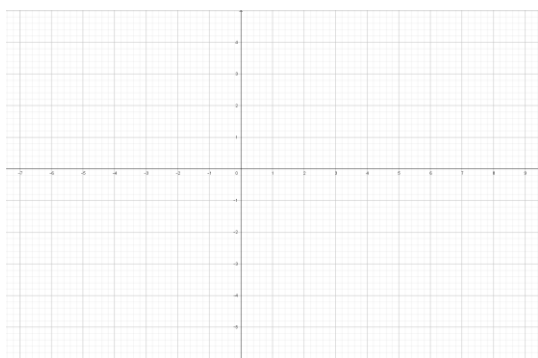
Σύμφωνα με τη γραφική επίλυση , σχεδιάζουμε στο επίπεδο τις δύο αυτές ευθείες και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. Αν οι δύο ευθείες **τέμνονται** τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** που είναι οι **συντεταγμένες του σημείου τομής** . Οι συντεταγμένες αυτές βρίσκονται προβάλλοντας το σημείο τομής στους άξονες και για αυτό το λόγο είναι απαραίτητη η χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού .
2. Αν οι δύο ευθείες είναι **παράλληλες** τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.
3. Αν οι δύο ευθείες **ταυτίζονται** τότε το σύστημα είναι **αόριστο** και έχει άπειρες λύσεις που είναι οι συντεταγμένες των άπειρων σημείων που βρίσκονται πάνω στην κοινή αυτή ευθεία (προσοχή : δεν είναι απαραίτητα κάθε ζεύγος τιμών λύση του συστήματος) .

Παρατήρηση : Η γραφική επίλυση δεν απόλυτα ακριβής λόγω των προβλημάτων που παρουσιάζονται στη σχεδίαση και λόγω της αδυναμίας που παρουσιάζεται στον προσδιορισμό των συντεταγμένων του σημείου τομής , ειδικά όταν αυτές δεν είναι ακέραιοι αριθμοί αλλά δεκαδικοί και δεν προσδιορίζονται ακριβώς από τις υποδιαιρέσεις του τετραγωνισμένου χαρτιού .

Άσκηση 2 Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x - y = 3 \end{cases} (\Sigma_1)$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases} (\Sigma_2) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases} (\Sigma_3) \quad \begin{cases} 3y = 6 \\ 4x = 12 \end{cases} (\Sigma_4) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases} (\Sigma_5)$$



Παρατήρηση : Ένα σύστημα που όλοι οι σταθεροί όροι είναι 0 λέγεται **ομογενές** και έχει σίγουρα μία λύση τη (0,0). Επομένως ένα ομογενές σύστημα αποκλείεται να είναι αδύνατο και έχει νόημα να το λύσουμε μόνο για να διαπιστώσουμε αν έχει μοναδική λύση τη (0,0) ή είναι αόριστο.