

Απαντήσεις εργασίας 1

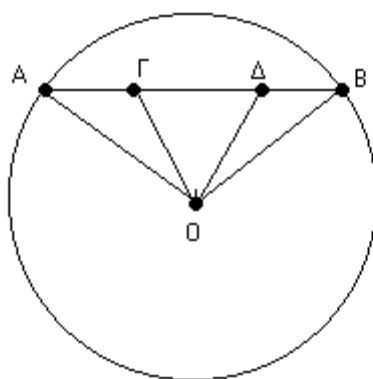
Θέμα 1^ο

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και μια χορδή του AB . Πάνω στη χορδή παίρνουμε δύο σημεία Γ και Δ έτσι ώστε $AG = BD$.

α) Να δείξετε ότι $OG = OD$.

β) Να δείξετε ότι $\widehat{O\Gamma\Delta} = \widehat{O\Delta\Gamma}$

Λύση



α) Θέλουμε να βγάλουμε τα OG και OD .

Δημιουργούμε λοιπόν δύο τρίγωνα που στο ένα ανήκει το OG και στο άλλο το OD , με σκοπό να τα βγάλουμε ίσα.

Τα δημιουργούμε λοιπόν με τις κατάλληλες προϋποθέσεις για μας φέρνοντας τις ακτίνες OA και OB .

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAG και OBD .

Έχουν $OA = OB$ (ως ακτίνες του κύκλου)

$AG = BD$ (από την υπόθεση)

$\angle A = \angle B$ (ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς OAB)

Τα τρίγωνα λοιπόν είναι ίσα (ΠΓΠ) και συνεπώς είναι και $OG = OD$

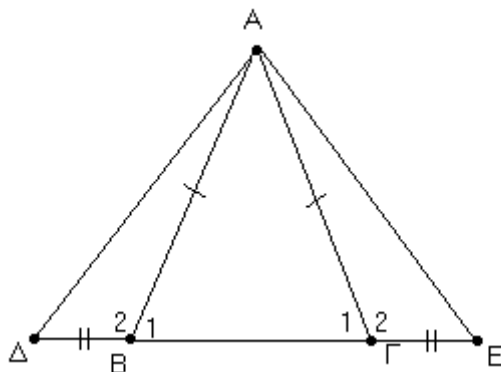
β) Αφού δείξαμε ότι $OG = OD$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες οπότε $\widehat{O\Gamma\Delta} = \widehat{O\Delta\Gamma}$

Θέμα 2^ο

Προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ και προς τα δύο άκρα κατά ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ .

α) Να δείξετε ότι το ΑΔΕ είναι ισοσκελές .

β) Να δείξετε ότι $\angle \Delta \hat{A} \Gamma = \angle B \hat{A} E$ οι γωνίες ΔΑΓ και



Λύση

Οι γωνίες $\hat{B}_1, \hat{\Gamma}_1$ είναι προσκείμενες στη βάση ΒΓ και άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Άρα και για τις παραπληρωματικές τους $\hat{B}_2, \hat{\Gamma}_2$ είναι $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα (Π-Γ-Π) αφού

$AB = AG$, $BD = GE$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$.

Επομένως και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ίσα και επειδή απέναντι από ίσες πλευρές ίσες γωνίες και αντίστροφα , έχουμε ότι $AD = AE$ και $\angle \Delta \hat{A} B = \angle \Gamma \hat{A} E$.

Αφού $AD = AE$ το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές .

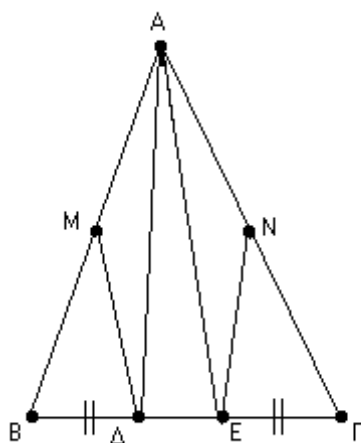
Επίσης $\angle \Delta \hat{A} \Gamma = \angle \Delta \hat{A} B + \angle B \hat{A} \Gamma = \angle \Gamma \hat{A} E + \angle B \hat{A} \Gamma = \angle B \hat{A} E$

Θέμα 3^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και M, N τα μέσα των ίσων πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω Δ και E σημεία της βάσης του τριγώνου, τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να δείξετε ότι :

- α) $M\Delta = NE$ β) $\hat{M}\Delta A = \hat{N}E A$ γ) το $A\Delta E$ ισοσκελές

Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $ME\Gamma$.

Έχουν $MB = N\Gamma$ (ως μισά των ίσων πλευρών $AB = A\Gamma$), $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου) και $B\Delta = \Gamma E$ (από την υπόθεση).

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ) και συνεπώς $M\Delta = NE$

β) Τα τρίγωνα $M\Delta A$ και NEA είναι ίσα (ΠΓΠ) αφού έχουν $AM = AN$ (ως μισά των ίσων πλευρών $AB = A\Gamma$), $M\Delta = NE$ (από το προηγούμενο ερώτημα) και $\hat{A}\hat{M}\Delta = \hat{A}\hat{N}E$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}\hat{M}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{N}E$ οι οποίες είναι ίσες αφού στο προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $NE\Gamma$ είναι ίσα). Άρα είναι και $\hat{M}\Delta A = \hat{N}E A$.

γ) Από την προηγούμενη ισότητα των τριγώνων $M\Delta A$ και $NE\Gamma$ προκύπτει ότι $A\Delta = AE$ πράγμα που σημαίνει ότι $A\Delta E$ ισοσκελές.