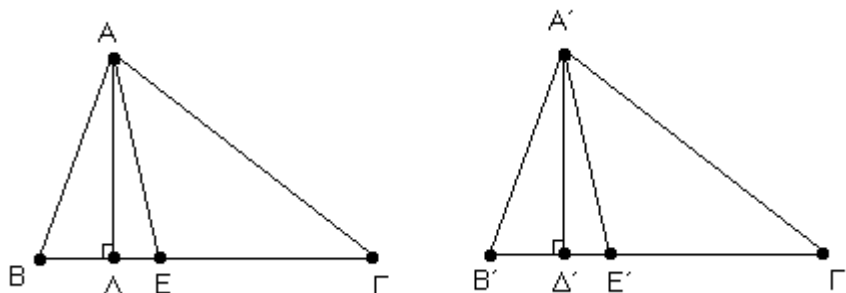


Απαντήσεις εργασίας 4

Θέμα 1^ο

Έστω δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{A}'$, $\nu_\alpha = \nu_{\alpha'}$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

Λύση

Έστω λοιπόν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με τα στοιχεία που περιγράφει η άσκηση. Θυμίζουμε ότι $\nu_\alpha = \nu_{\alpha'}$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$ σημαίνει ότι οι διχοτόμοι και τα ύψη που άγονται από τις κορυφές A και A' είναι ίσα.

- Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $A'\Delta'E'$ είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια με $A\Delta = A'\Delta'$ (υποθ $\nu_\alpha = \nu_{\alpha'}$) και $AE = A'E'$ (υποθ $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$). Επομένως είναι και $\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{A'\hat{E}'\Delta'}$.
- Τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $A'\Gamma'E'$ είναι ίσα ($\Gamma\Pi\Gamma$), αφού έχουν $AE = A'E'$ (υποθ $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$), $\hat{A\hat{E}\Gamma} = \hat{A'\hat{E}'\Gamma'}$ (ως μισά των ίσων γωνιών $\hat{A} = \hat{A}'$) και $\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{A'\hat{E}'\Delta'}$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{A'\hat{E}'\Delta'}$). Επομένως είναι και $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Τελικά τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα ($\Gamma-\Pi-\Gamma$) αφού έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Θέμα 2^ο

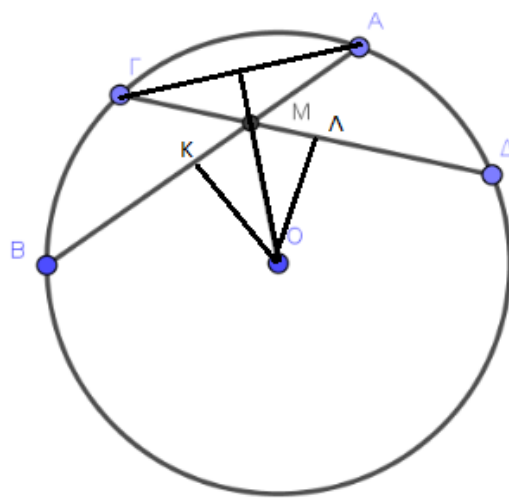
Δίνεται κύκλος (O, ρ) και δύο ίσες χορδές του AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται εντός του κύκλου στο σημείο M .

α) Να δείξετε ότι $MA=MG$ και $MB=MD$

β) Να δείξετε ότι η OM είναι διχοτόμος της $\widehat{AM\Gamma}$

γ) Να δείξετε ότι $OM \perp AG$, $OM \perp BD$

Λύση



Η ισότητα των χορδών AB και $\Gamma\Delta$ μας οδηγεί στη σκέψη να φέρουμε τα αποστήματα OK και $O\Lambda$ για τα οποία ξέρουμε ότι είναι ίσα, αφού σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα αποστήματα.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OMK και $OM\Lambda$.

Είναι ορθογώνια με OM κοινή και $OK = O\Lambda$ (ως αποστήματα που αντιστοιχούν σε ίσες χορδές).

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα και συνεπώς είναι $MK = M\Lambda$ και $\widehat{OMK} = \widehat{OM\Lambda}$.

Όμως $BK = KA = \Lambda\Delta = \Lambda\Gamma$ ως μισά ίσων χορδών οπότε αφού

$MK = M\Lambda$ και $BK = \Lambda\Delta$ είναι και $MB = MD$ ως άθροισμα ίσων πλευρών και αφού $AB = \Gamma\Delta$ είναι και $MA = MG$ ως διαφορά ίσων πλευρών

Τέλος αφού $\widehat{OMK} = \widehat{OM\Lambda}$ η OM είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{AM\Gamma}$, $\widehat{BMD}$ στα ισοσκελή τρίγωνα $AM\Gamma$ και $BM\Delta$ αντίστοιχα οπότε θα είναι και ύψος πράγμα που αποδεικνύει ότι $OM \perp AG$, $OM \perp BD$

Παρατήρηση

Όταν δίνεται ως υπόθεση ισότητα χορδών φέρνουμε τα αντίστοιχα αποστήματα για τα οποία ξέρουμε ότι είναι ίσα.

Είναι κάτι που το κάνουμε συχνά και που πρέπει να το έχετε υπ' όψη σας.

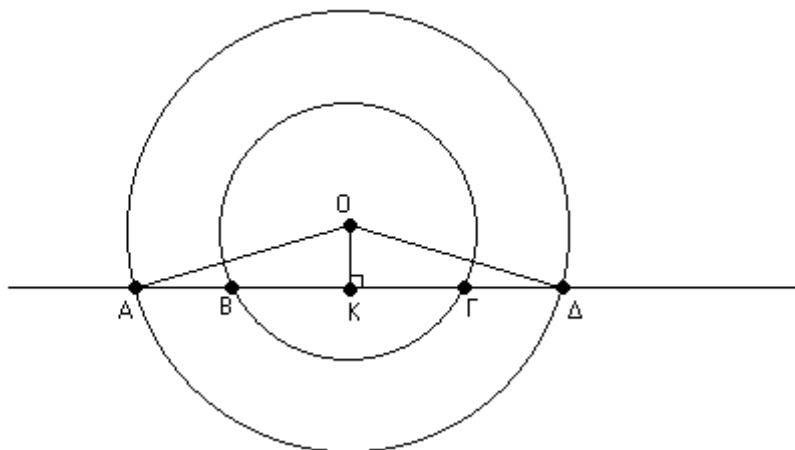
Θέμα 3^ο

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, P) και (O, ρ) με $P > \rho$.

Μια ευθεία ε τέμνει τους δύο κύκλους κατά σειρά στα σημεία A, B, Γ, Δ .

Να δείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$.

Λύση



Αυτό που θα σκεφτόταν να κάνει κάποιος για να δείξει ότι $AB = \Gamma\Delta$, είναι να φέρει τις ακτίνες OA, OB, OG, OD και να προσπαθήσει να βγάλει τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ ίσα. Αν όμως προσπαθήσει να το κάνει θα δει ότι δεν θα τα καταφέρει διότι δεν θα έχει επαρκή στοιχεία.

Για αυτό λοιπόν σκεφτόμαστε να φέρουμε το απόστημα OK κάτι που το κάνουμε συχνά σε τέτοιες ασκήσεις.

Είναι και $AK = K\Delta$ γιατί γνωρίζουμε ότι το απόστημα OK καταλήγει στο μέσο της χορδής $A\Delta$ στο μεγάλο κύκλο.

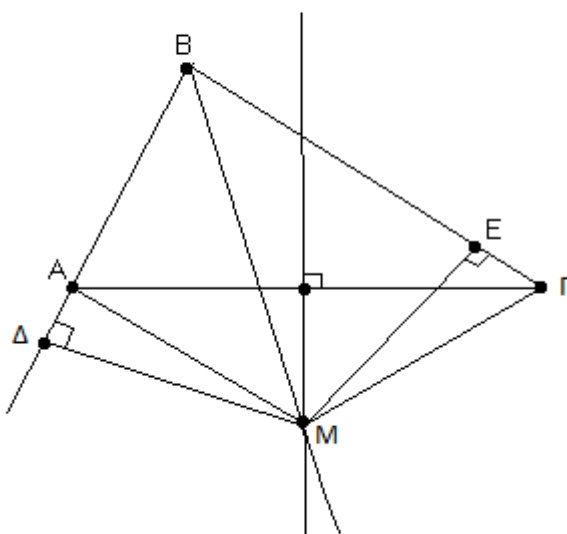
Όμως είναι και $BK = K\Gamma$ γιατί γνωρίζουμε ότι το απόστημα OK καταλήγει στο μέσο της χορδής $B\Gamma$ στο μικρό κύκλο.

Τελικά είναι $AB = \Gamma\Delta$ ως διαφορά των ίσων τμημάτων $AK = K\Delta$ και $BK = K\Gamma$.

Θέμα 4^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η μεσοκάθετος της πλευράς $A\Gamma$ και η διχοτόμος της γωνίας B τέμνονται σε σημείο M εκτός του τριγώνου. Αν Δ και E οι προβολές του M στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι $AD = GE$.

Λύση



Αφού το M ανήκει στη μεσοκάθετο του $A\Gamma$, θα ισπαέχει από τα άκρα του, δηλαδή $MA = M\Gamma$.

Αφού το M ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας B θα ισπαέχει από τις πλευρές της γωνίας, δηλαδή $M\Delta = ME$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $M\Delta\Delta$, $M\Gamma E$.

Είναι ορθογώνια με $MA = M\Gamma$ και $M\Delta = ME$. Συνεπώς είναι ίσα και άρα είναι και $AD = GE$.