

Απαντήσεις εργασίας 5

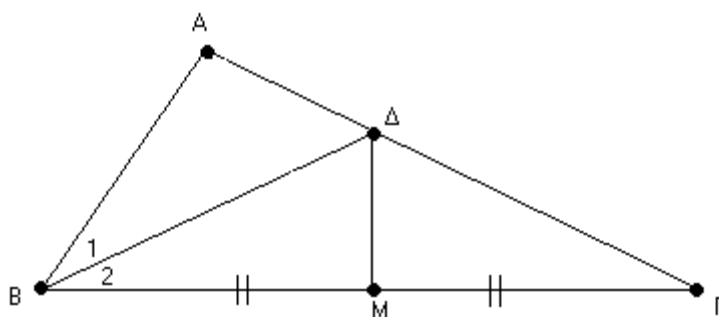
Θέμα 1^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $B\Gamma = 2 AB$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε τη διχοτόμο $B\Delta$ και παίρνουμε το μέσο M της $B\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι $\Delta M \perp B\Gamma$

β) Να δείξετε ότι η γωνία A είναι ορθή.

Λύση



Η ισότητα $B\Gamma = 2 AB$ μας λέει ότι η πλευρά AB είναι ίση με το μισό της $B\Gamma$. Αφού λοιπόν M μέσο της $B\Gamma$ είναι λοιπόν $AB = BM = M\Gamma$.

Η ισότητα $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ μας λέει ότι η γωνία Γ είναι ίση με το μισό της γωνίας B . Αφού λοιπόν $B\Delta$ διχοτόμος είναι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$.

Έτσι το τρίγωνο $B\Delta M$ είναι ισοσκελές αφού έχει δύο γωνίες ίσες τις $B_2 = \Gamma$.

Στο ισοσκελές αυτό τρίγωνο η ΔM είναι διάμεσος οπότε θα είναι και ύψος, δηλαδή η γωνία $B M \Delta$ είναι ορθή.

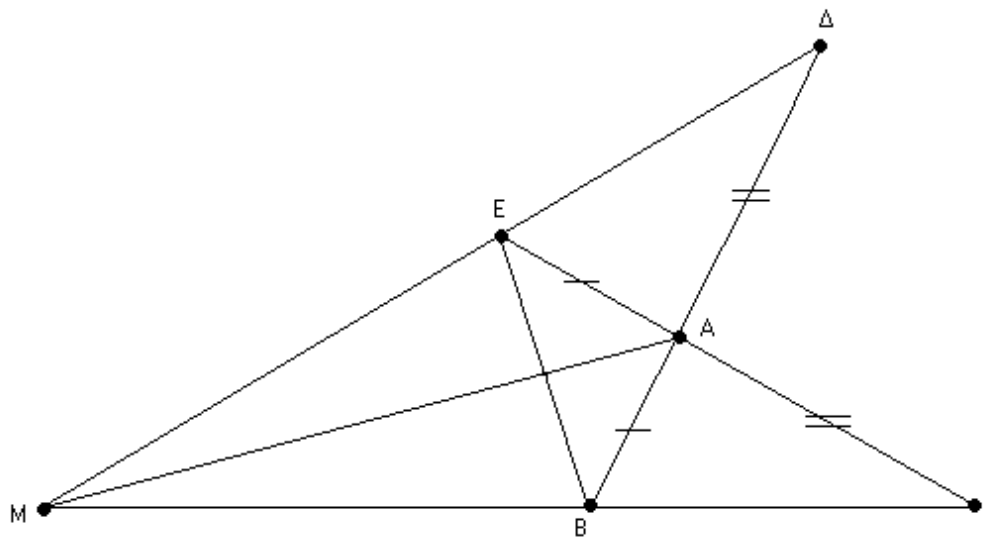
Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και ABM είναι ίσα αφού $AB = BM$, $B\Delta$ κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$.

Συνεπώς θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα και έτσι η γωνία A θα είναι ίση με τη $B M \Delta$ που είναι ορθή και άρα και η γωνία A είναι ορθή.

Θέμα 2^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA προς το μέρος του A κατά τμήματα $A\Delta = A\Gamma$ και $AE = AB$ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔE τέμνει την $B\Gamma$ στο M . Να δείξετε ότι :

- α) το τρίγωνο MBE είναι ισοσκελές
 β) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας BME .

Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα αφού $AB = AE$ (υπόθεση) , $A\Delta = A\Gamma$ (υπόθεση) και $\angle EAD = \angle BAG$ (ως κατά κορυφήν) .
 Άρα είναι και $\angle AED = \angle AB\Gamma$ (1) .

Επίσης το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές πράγμα που σημαίνει ότι $\angle AEB = \angle ABE$ (2) .

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε ότι $\angle BED = \angle EBG$.

Τέλος είναι και $\angle MBE = \angle MEB$ (ως παραπληρωματικές των $\angle BED = \angle EBG$)
 πράγμα που σημαίνει ότι το τρίγωνο MBE είναι ισοσκελές .

β) Ενώνουμε το M με το A και θα δείξουμε ότι η AM είναι διχοτόμος της γωνίας BME .

Τα τρίγωνα AMB και AME είναι ίσα αφού $MB = ME$ (δείξαμε ότι MBE ισοσκελές) , AM κοινή και $AE = AB$ (υπόθεση) .

Συνεπώς θα είναι και $\angle AME = \angle AMB$ και επομένως πράγματι η AM διχοτομεί τη γωνία BME .

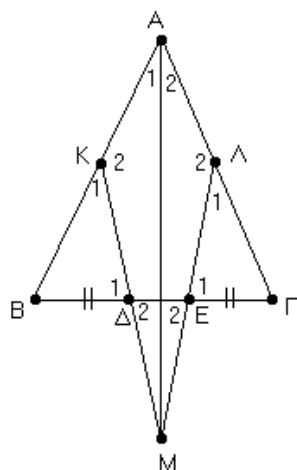
Θέμα 3^ο

Έστω K, Λ τα μέσα των ίσων πλευρών AB και AG ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ και Δ, E σημεία της βάσης $B\Gamma$ ώστε $B\Delta = \Gamma E < \frac{\alpha}{2}$. Οι $K\Delta$ και ΛE

τέμνονται στο σημείο M . Να δείξετε ότι

α) $MK = M\Lambda$

β) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

Λύση

Τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda E$ είναι ίσα αφού $BK = \Gamma\Lambda$ (ως μισά των ίσων $AB = AG$), $B\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση) και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (προσκειμένες στη βάση ισοσκελούς). Άρα είναι και $K\Delta = E\Lambda$, $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$. Επομένως είναι και $\hat{K}_2 = \hat{\Lambda}_2$ ως παραπληρωματικές των $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$ και $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2$ ως κατακορυφήν των $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$.

Αφού $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2$ το τρίγωνο ΔME είναι ισοσκελές και άρα $M\Delta = ME$.

Τελικά τα τρίγωνα AMK και $AM\Lambda$ είναι ίσα αφού $AK = A\Lambda$ (ως μισά των ίσων $AB = AG$), $MK = M\Lambda$ (ως άθροισμα των ίσων $M\Delta = ME$ και $\Delta K = \Delta E$) και $\hat{K}_2 = \hat{\Lambda}_2$. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ δηλαδή η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.