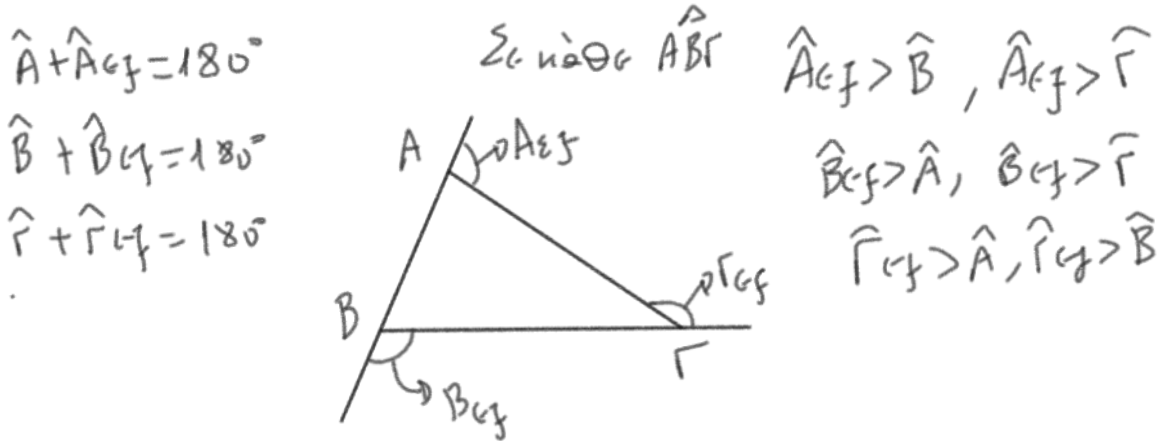


Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.



ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
- (ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .

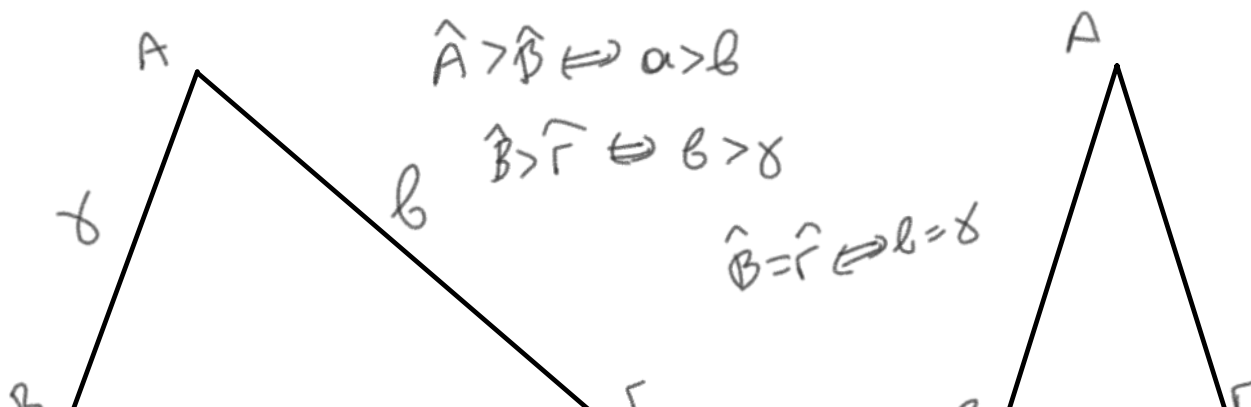
$\iota) \text{ Αν } \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_{\epsilon\zeta} = 90^\circ \text{ οπότε } \hat{B} < \hat{A}_{\epsilon\zeta} \Rightarrow \hat{B} < 90^\circ$
 $\hat{\Gamma} < \hat{A}_{\epsilon\zeta} \Rightarrow \hat{\Gamma} < 90^\circ$

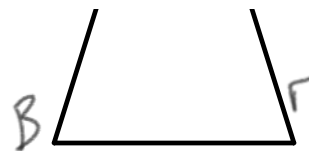
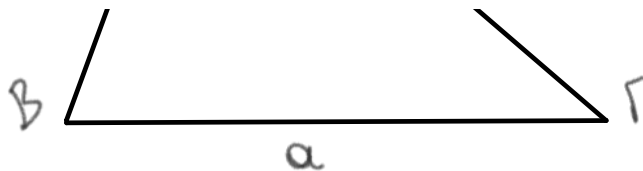
$\iota\iota) \hat{A}_{\epsilon\zeta} > \hat{B} \Rightarrow 180^\circ - \hat{A} > \hat{B} \Rightarrow 180^\circ > \hat{A} + \hat{B}$
 $\hat{A}_{\epsilon\zeta} > \hat{\Gamma} \Rightarrow 180^\circ - \hat{A} > \hat{\Gamma} \Rightarrow 180^\circ > \hat{A} + \hat{\Gamma}$

$\hat{B}_{\epsilon\zeta} > \hat{\Gamma} \Rightarrow 180^\circ - \hat{B} > \hat{\Gamma} \Rightarrow 180^\circ > \hat{B} + \hat{\Gamma}$

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.





ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

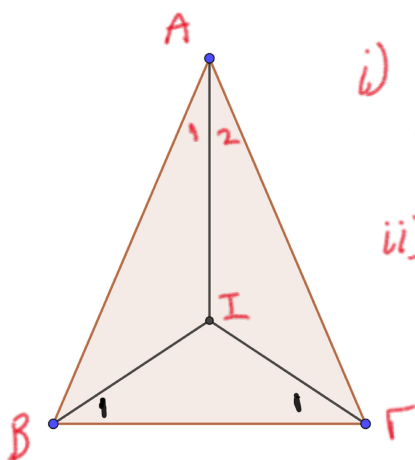
- (i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
- (ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- (iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

ΣΧΟΛΙΟ

Το διπλανό πόρισμα (ii) είναι το αντίστροφο του πορίσματος I της § 3.2. Τα δύο αυτά πορίσματα συνοψίζονται στο εξής: ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.

9. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- i) το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές,
- ii) η AI είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.



$$i) AB = A\Gamma \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow B\Gamma I \text{ ισοσκελές}$$

$$ii) \text{ Συγκρίνω } \triangle B\Gamma I, \triangle A\Gamma I$$

$$AB = A\Gamma \text{ (υπόθ.)}$$

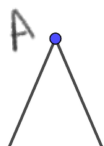
$$AI \text{ κοινή}$$

$$BI = \Gamma I \text{ (απο το i)}$$

$$\text{Είναι ίσα οπότε } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow AI \text{ διχοτόμος του } \hat{A}.$$

8. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K, Λ τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ , τότε το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

$$AB = A\Gamma \Rightarrow$$



$$\text{Συγκρίνω } \triangle K\Delta B, \triangle \Lambda\Delta \Gamma$$

$$AB = AG \Rightarrow$$

$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow$$

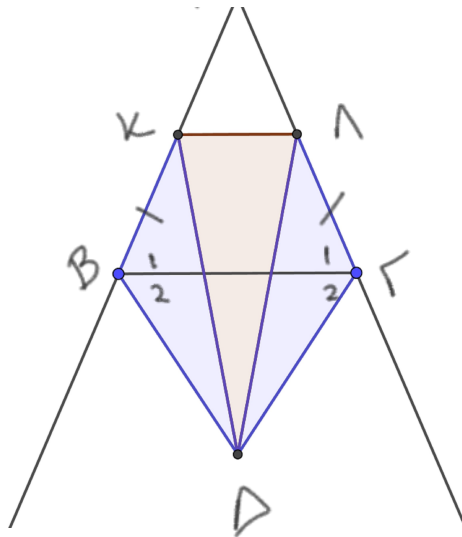
$$\hat{B}_{1/2} = \hat{\Gamma}_{1/2} \Rightarrow$$

$$\hat{B}_{1/2} = \hat{\Gamma}_{1/2} \Rightarrow$$

$$\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 \Rightarrow$$

$$B\Gamma \Delta \text{ ισοσκελές } \Rightarrow$$

$$KB = \Delta\Gamma$$



$$\Sigma \text{ σχήματα } \Delta KB, \Delta \Lambda\Gamma$$

$$KB = \Lambda\Gamma \text{ (ως πλευρές των ισών } AB = AG)$$

$$\Delta B = \Delta\Gamma \text{ (αφ' ου } \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2)$$

$$\hat{B}_{1/2} = \hat{\Gamma}_{1/2} \text{ (ως άθροισμα ίσων γωνιών)}$$

$$\text{Είναι ίσα } \eta - \Gamma - \eta$$

$$\text{οπότε } \Delta K = \Delta \Lambda \text{ άρα } \Delta K \Lambda \text{ ισοσκελές}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AG \Rightarrow A \text{ σημ μέσοκαθετό του } B\Gamma \\ AB = \Delta\Gamma \Rightarrow \Delta \text{ σημ μέσοκαθετό του } B\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A\Delta \text{ μέσοκαθετός του } B\Gamma$$

$$\left. \begin{array}{l} AK = \Lambda\Lambda \Rightarrow A \text{ σημ μέσοκαθετό του } K\Lambda \\ \Delta K = \Delta\Lambda \Rightarrow \Delta \text{ σημ μέσοκαθετό του } K\Lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A\Delta \text{ μέσοκαθετός του } K\Lambda$$