

5. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν η διχοτόμος δ_a τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_B , να αποδείξετε ότι:

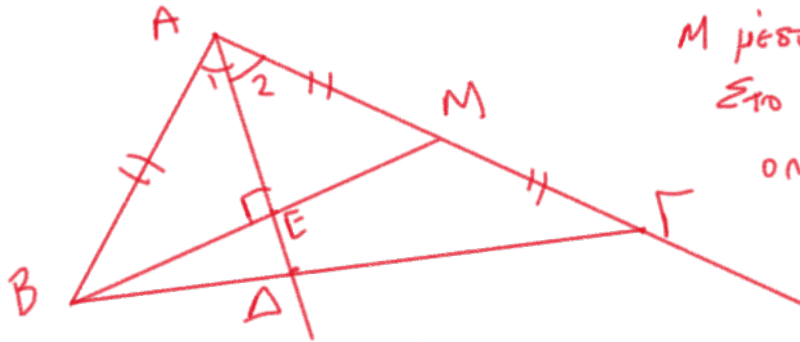
i) $A\Gamma = 2AB$,

ii) $AB < B\Gamma$.

$\mu_B = BM$

$BM \perp AD$

$\delta_a = AD$



M μέσο $AG \Rightarrow A\Gamma = 2 \cdot AM$ (1)

Στο $\triangle ABM$, AE διχοτόμος και ύψος
οπότε $\triangle ABM$ ισοσκελές με $AB = AM$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow A\Gamma = 2 \cdot AB$ (3)

Τριγωνική ανισότητα στο $\triangle AB\Gamma$

$A\Gamma < AB + B\Gamma \xrightarrow{(3)} 2AB < AB + B\Gamma \Rightarrow$

$2AB - AB < B\Gamma \Rightarrow AB < B\Gamma$

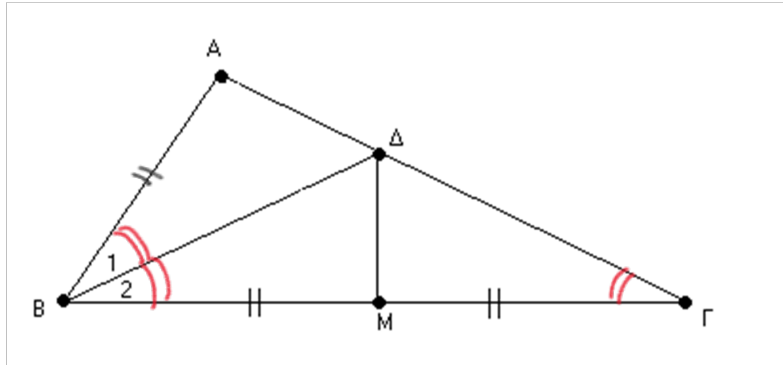
Θέμα 1°

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $B\Gamma = 2 AB$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε τη διχοτόμο BD και παίρνουμε το μέσο M της $B\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι $DM \perp B\Gamma$

β) Να δείξετε ότι η γωνία A είναι ορθή.

Λύση



Η ισότητα $B\Gamma = 2 AB$ μας λέει ότι η πλευρά AB είναι ίση με το μισό της $B\Gamma$. Αφού λοιπόν M μέσο της $B\Gamma$ είναι λοιπόν $AB = BM = MG$.

Η ισότητα $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ μας λέει ότι η γωνία Γ είναι ίση με το μισό της γωνίας B . Αφού λοιπόν BD διχοτόμος είναι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$.

Έτσι το τρίγωνο BDM είναι ισοσκελές αφού έχει δύο γωνίες ίσες τις $B_2 = \Gamma$.

Στο ισοσκελές αυτό τρίγωνο η DM είναι διάμεσος οπότε θα είναι και ύψος, δηλαδή η γωνία BMD είναι ορθή.

Τα τρίγωνα ABD και ABM είναι ίσα αφού $AB = BM$, BD κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$.

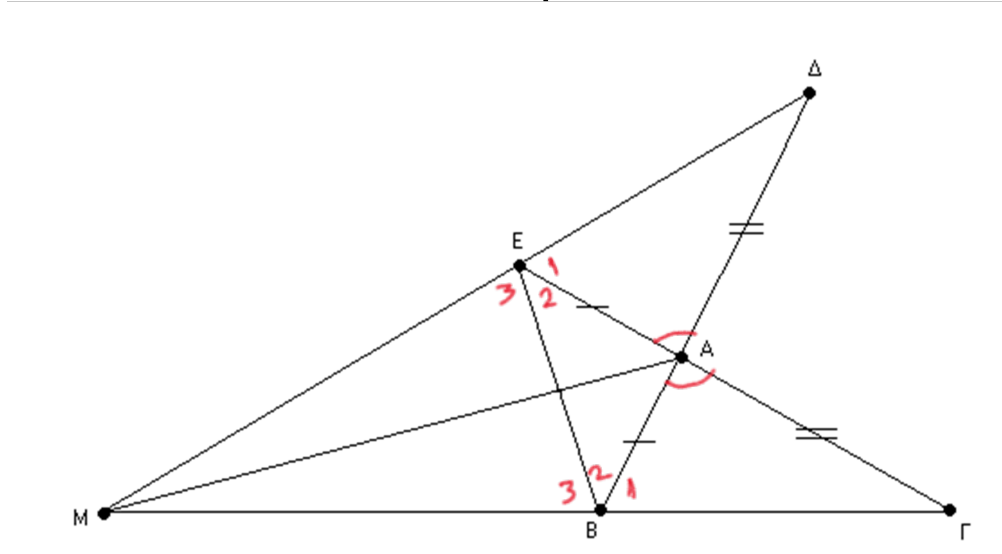
Συνεπώς θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα και έτσι η γωνία A θα είναι ίση με τη BMD που είναι ορθή και άρα και η γωνία A είναι ορθή.

Θέμα 2^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA προς το μέρος του A κατά τμήματα $A\Delta = A\Gamma$ και $AE = AB$ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔE τέμνει την $B\Gamma$ στο M . Να δείξετε ότι :

- α) το τρίγωνο MBE είναι ισοσκελές
- β) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας BME .

Λύση



α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα αφού $AB = A\Delta$ (υπόθεση), $A\Delta = A\Gamma$ (υπόθεση) και $\angle EAD = \angle BAA$ (ως κατά κορυφήν). Άρα είναι και $\angle AED = \angle AB\Gamma$ (1).

Επίσης το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές πράγμα που σημαίνει ότι $\angle AEB = \angle ABE$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε ότι $\angle BED = \angle EB\Gamma$.

Τέλος είναι και $\angle MBE = \angle MEB$ (ως παραπληρωματικές των $\angle BED = \angle EB\Gamma$) πράγμα που σημαίνει ότι το τρίγωνο MBE είναι ισοσκελές.

β) Ενώνουμε το M με το A και θα δείξουμε ότι η AM είναι διχοτόμος της γωνίας BME .

Τα τρίγωνα AMB και AME είναι ίσα αφού $MB = ME$ (δείξαμε ότι MBE ισοσκελές), AM κοινή και $AE = AB$ (υπόθεση).

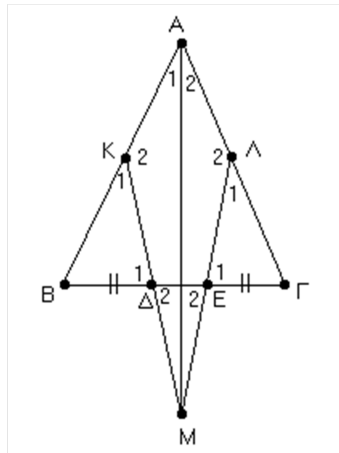
Συνεπώς θα είναι και $\angle AME = \angle AMB$ και επομένως πράγματι η AM διχοτομεί τη γωνία BME .

Θέμα 3^ο

Έστω K, Λ τα μέσα των ίσων πλευρών AB και AG ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ και Δ, E σημεία της βάσης $B\Gamma$ ώστε $B\Delta = \Gamma E < \frac{\alpha}{2}$. Οι $K\Delta$ και ΛE τέμνονται στο σημείο M . Να δείξετε ότι

α) $MK = M\Lambda$
β) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

Λύση



Τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda E$ είναι ίσα αφού $BK = \Gamma\Lambda$ (ως μισά των ίσων $AB = AG$), $B\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση) και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (προσκεείμενες στη βάση ισοσκελούς). Άρα είναι και $K\Delta = E\Lambda$, $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$. Επομένως είναι και $\hat{K}_2 = \hat{\Lambda}_2$ ως παραπληρωματικές των $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$ και $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2$ ως κατακορυφήν των $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$. Αφού $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2$ το τρίγωνο ΔME είναι ισοσκελές και άρα $M\Delta = ME$.

Τελικά τα τρίγωνα AMK και $AM\Lambda$ είναι ίσα αφού $AK = A\Lambda$ (ως μισά των ίσων $AB = AG$), $MK = M\Lambda$ (ως άθροισμα των ίσων $M\Delta = ME$ και $\Delta K = \Delta E$) και $\hat{K}_2 = \hat{\Lambda}_2$. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ δηλαδή η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.