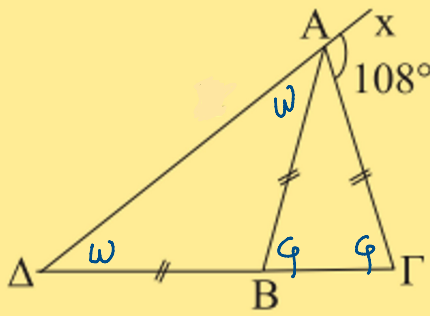


5. Στο παρακάτω σχήμα είναι:



$AB = AG = \Delta B$ και $\hat{x}\hat{A}\hat{\Gamma} = 108^\circ$.

Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{A}$.

$\hat{\Gamma}\hat{A}_x$ εξωτερική στο $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$

$$\text{οπότε } \hat{\Gamma}\hat{A}_x = \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} \Rightarrow \boxed{108^\circ = w + w} \quad (1)$$

$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ εξωτερική στο $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}$

$$\text{οπότε } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} + \hat{w} \Rightarrow w = w + w \Rightarrow \boxed{w = 2w} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow 108^\circ = 2w + w \Rightarrow 108^\circ = 3w \Rightarrow$$

$$\boxed{w = 36^\circ}$$

Αποδεικτικές

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B}_{\text{εξ}} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $AB = A\Gamma$.

Αρκεί ν.δ.ο. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

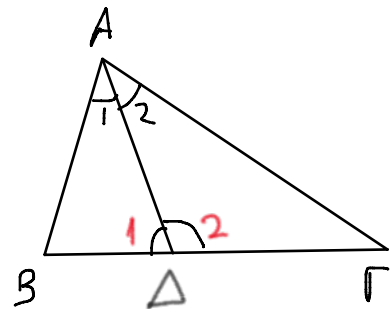
$$\hat{B}_{\text{εξ}} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow 180^\circ - \hat{B} = 90^\circ + \frac{180^\circ - \hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$360^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ + 180^\circ - \hat{B} - \hat{\Gamma} \Rightarrow \boxed{\hat{\Gamma} = \hat{B}}$$

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του $\hat{A}$. Να αποδείξετε ότι

i) $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} - \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$,

ii) $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$, $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.



$$\hat{\Delta}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B} \quad (\hat{\Delta}_2 \text{ εξωτερική στο } \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}) \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad (\text{AD διχοτόμος})$$

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} \quad (\hat{\Delta}_1 \text{ εξωτερική στο } \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma})$$

$$\text{οπότε } \hat{\Delta}_2 - \hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B} - (\hat{A}_2 + \hat{\Gamma}) = \hat{A}_1 + \hat{B} - \hat{A}_2 - \hat{\Gamma} \stackrel{\hat{A}_1 = \hat{A}_2}{=} \hat{B} - \hat{\Gamma}$$

$$\text{Συνεπώς } \boxed{\hat{B} - \hat{\Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma}} \quad (1)$$

υποθέτουμε $\hat{\Delta}_2 - \hat{\Delta}_1 = \hat{\beta} - \hat{\gamma}$

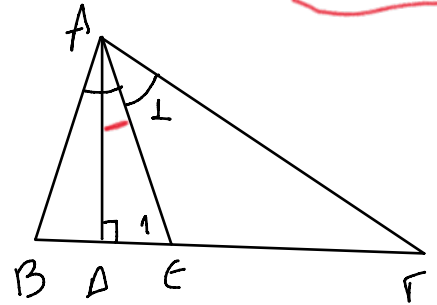
$$\sum \text{υπερήκων} \quad \boxed{\hat{\Delta}_2 - \hat{\Delta}_1 = \hat{\beta} - \hat{\gamma}} \quad (1)$$

$$\text{'Ομως} \quad \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \hat{\Delta}_2 - \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ + \hat{\beta} - \hat{\gamma} \Rightarrow 2\hat{\Delta}_2 = 180^\circ + \hat{\beta} - \hat{\gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}_2 = 90^\circ + \frac{\hat{\beta} - \hat{\gamma}}{2}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 - \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ - (\hat{\beta} - \hat{\gamma}) \Rightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 180^\circ - (\hat{\beta} - \hat{\gamma}) \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{\beta} - \hat{\gamma}}{2}$$

3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος AD και τη διχοτόμο AE . Να αποδείξετε ότι $\angle \hat{A}E = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.



• $\hat{\epsilon}_1$ εξωτερική στο $\hat{A}E\Gamma$ οπότε $\hat{\epsilon}_1 = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma}$

• AE διχοτόμος οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$$\begin{aligned} \angle \hat{A}E &= 180^\circ - 90^\circ - \hat{E}_1 = 90^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{\Gamma}) = \\ &= 90^\circ - \hat{A}_1 - \hat{\Gamma} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \\ &= 90^\circ - \frac{180^\circ - \hat{\beta} - \hat{\gamma}}{2} - \hat{\Gamma} = \\ &= \frac{180^\circ - (180^\circ - \hat{\beta} - \hat{\gamma}) - 2\hat{\Gamma}}{2} = \\ &= \frac{180^\circ - 180^\circ + \hat{\beta} + \hat{\gamma} - 2\hat{\Gamma}}{2} = \boxed{\frac{\hat{\beta} - \hat{\gamma}}{2}} \end{aligned}$$