

5. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.

Δ | $BE, \Gamma D$ διαμέσων
 $BE = \Gamma D$

 Σ | $AB = A\Gamma$

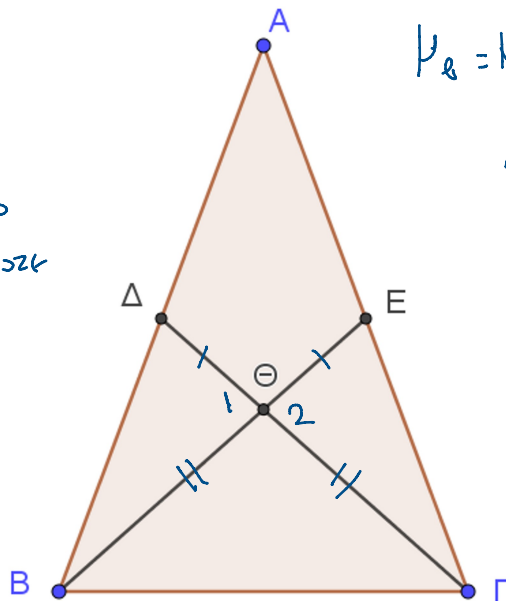
Εστω Θ το
 βαρύκεντρο. Τότε

$$\Gamma\Theta = \frac{2}{3} \Gamma D$$

$$\Theta D = \frac{1}{3} \Gamma D$$

$$B\Theta = \frac{2}{3} BE$$

$$\Theta E = \frac{1}{3} BE$$



$$\mu_\beta = \mu_\gamma \Rightarrow BE = \Gamma D \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} BE = \frac{2}{3} \Gamma D \\ \frac{1}{3} BE = \frac{1}{3} \Gamma D \end{cases} \Rightarrow$$

$$B\Theta = \Gamma\Theta \text{ και } \Delta\Theta = \Theta E$$

Συγκρίνω $\triangle B\Theta\Delta, \triangle \Gamma\Theta E$

$$\hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2 \text{ (ω) κατακορυφήν}$$

$$B\Theta = \Gamma\Theta$$

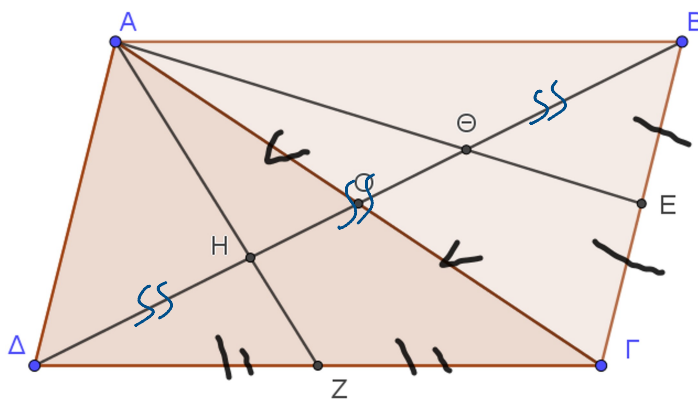
$$\Theta\Delta = \Theta E$$

Είναι ισα (π-Γ-π)

$$\text{οπότε } B\Delta = \Gamma E \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$AB = A\Gamma \Rightarrow AB\Gamma \text{ ισοσκελές}$$

**5. Αν E, Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, \Gamma\Delta$ παραλληλο-
 γράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι AE και
 AZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $B\Delta$.**



$$\text{Τέλος } \Theta H = B\Delta - B\Theta - \Delta H \xrightarrow{(1), (2)}$$

$$\Theta H = B\Delta - \frac{B\Delta}{3} - \frac{B\Delta}{3} \Rightarrow$$

$$\Theta H = \frac{B\Delta}{3}$$

$$\text{Ποι συμπεραίνει ότι } B\Theta = \Theta H = H\Delta = \frac{B\Delta}{3}.$$

Στο $\triangle AB\Gamma$, $A \in$ διαμέσου,

$B\Theta$ διαμέσου οπότε το Θ

βαρύκεντρο. Συνεπώς

$$B\Theta = \frac{2}{3} B\Gamma = \frac{2}{3} \frac{B\Delta}{2} = \frac{B\Delta}{3} \quad (1)$$

Στο $\triangle A\Gamma\Delta$, AZ διαμέσου,

$\Delta\Theta$ διαμέσου οπότε το H
 βαρύκεντρο. Συνεπώς

$$\Delta H = \frac{2}{3} \Delta\Gamma = \frac{2}{3} \frac{B\Delta}{2} = \frac{B\Delta}{3} \quad (2)$$