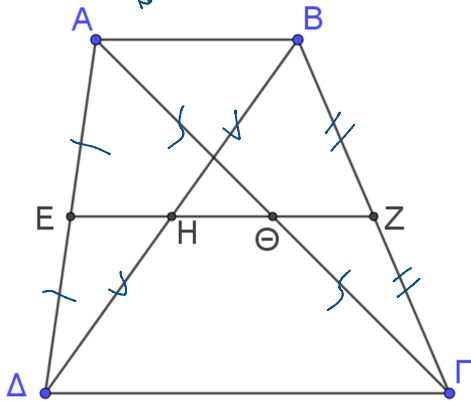


7. Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.

Έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο
με $\Delta\Gamma = 2AB$



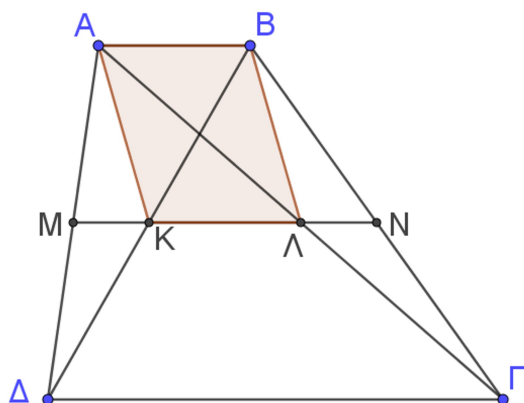
Στο $\triangle ABD$
 E μέσο AD
 H μέσο BD $\Rightarrow EH = \frac{AB}{2}$ (1)

Στο $\triangle B\Gamma\Delta$
 Z μέσο $B\Gamma$
 Θ μέσο $\Delta\Gamma$ $\Rightarrow Z\Theta = \frac{AB}{2}$ (2)

Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$
 H μέσο BD
 Θ μέσο $\Delta\Gamma$ $\Rightarrow H\Theta = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{2AB - AB}{2} = \frac{AB}{2}$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow EH = H\Theta = \Theta Z = \frac{AB}{2}$

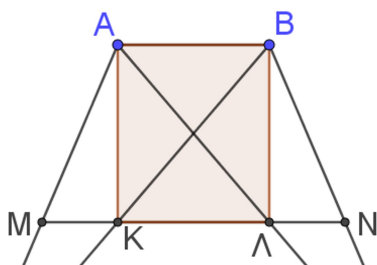
8. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta = 3AB$ και K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΔB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $AK\Lambda B$ είναι παραλληλόγραμμο. Πότε αυτό είναι ορθογώνιο;



$AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο

K μέσο BD
 Λ μέσο $A\Gamma$ $\Rightarrow K\Lambda \parallel AB$ και
 $K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$

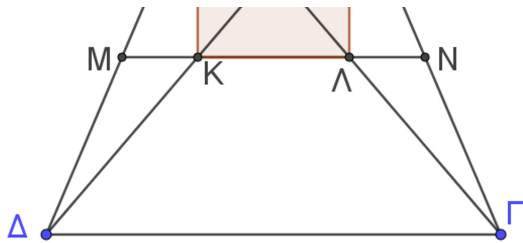
Αφού $K\Lambda \parallel AB$ και $K\Lambda = AB$ το $AB\Lambda K$ παραλλ/μο



Για να είναι $AB\Lambda K$ ορθογώνιο
 θα έπρεπε $AK = B\Lambda \Leftrightarrow$

$\frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow$

Αρα η ισότητα

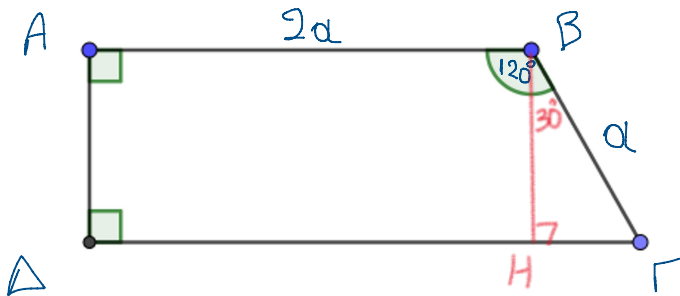


$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \dots$
 $ABCD$ ισοσκελές

Αν εείαξουν $AG \perp BD$ τότε το $ABAK$ θα ήτον ρομβός

Αν εείαξουν $ABCD$ ισοσκελές και $AG \perp BD$ το $ABAK$ θα ήτον τετράγωνο.

3. Δίνεται τραπέζιο $ABΓΔ$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 120^\circ$.
 Αν $AB = 2a$ και $BΓ = a$ να υπολογίσετε τη διάμεσο EZ ,
 ως συνάρτηση του a .



$$EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{2a + \Gamma\Delta}{2} \quad (1)$$

Φέρνω το ύψος BH οπότε
 $\hat{H}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και άρα $H\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{a}{2} \quad (2)$

(επίσης) $\Delta H = AB = 2a \quad (3)$

$$(2) + (3) \Rightarrow \Delta H + H\Gamma = 2a + \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta\Gamma = \frac{5a}{2}} \quad (4)$$

$$(1) \xrightarrow{(4)} EZ = \frac{2a + \frac{5a}{2}}{2} = \frac{9a}{4}$$