

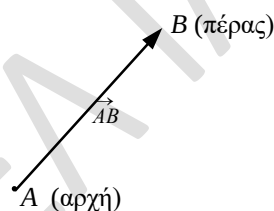
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

- **Μονόμετρα ή βαθμωτά μεγέθη**

Υπάρχουν μεγέθη, όπως είναι η μάζα, ο όγκος, η πυκνότητα, η θερμοκρασία κτλ., τα οποία προσδιορίζονται από το μέτρο τους και από την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης. Τα μεγέθη αυτά λέγονται **μονόμετρα ή βαθμωτά**.

- **Διανυσματικά μεγέθη ή απλώς διανύσματα.**

Υπάρχουν όμως και μεγέθη, όπως είναι η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η μετατόπιση, η μαγνητική επαγωγή κτλ., που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά τους. Τέτοια μεγέθη λέγονται **διανυσματικά μεγέθη ή απλώς διανύσματα**.



- **Ορισμός διανύσματος**

Στη Γεωμετρία το **διάνυσμα** ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος.

- **Συμβολισμός διανύσματος**

Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με $\vec{AB}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το A και καταλήγει στο B .

Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε πολλές φορές τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου επιγραμμισμένα με βέλος· για παράδειγμα, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \dots, \vec{u}, \vec{v}, \dots$

- **Μηδενικό διάνυσμα**

Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**. Συμβολίζεται με $\vec{0}$.

Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα.

Προφανώς $\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$

- **Μέτρο ή μήκος διανύσματος**

Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος $\vec{AB}$, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος $\vec{AB}$ και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$. Δηλαδή $|\vec{AB}| = (AB) \geq 0$

Αν το διάνυσμα $\vec{AB}$ έχει μέτρο 1, τότε λέγεται **μοναδιαίο** διάνυσμα.

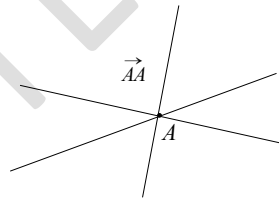
Προφανώς $|\vec{0}| = 0$ ενώ

αν $|\vec{u}| = 0$ τότε $\vec{u} = \vec{0}$ και

αν $|\vec{u}| > 0$ τότε $\vec{u} \neq \vec{0}$

- Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{AB}$ λέγεται **φορέας** του $\vec{AB}$.

Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\vec{AA}$ μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A .



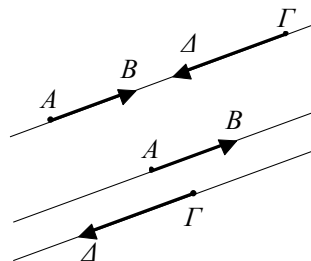
- **Διάνυσμα παράλληλο σε μια ευθεία**

Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\vec{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ , τότε λέμε ότι το $\vec{AB}$ είναι παράλληλο προς τη ζ και γράφουμε $\vec{AB} // \zeta$.

- **Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα**

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$, που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** διανύσματα.

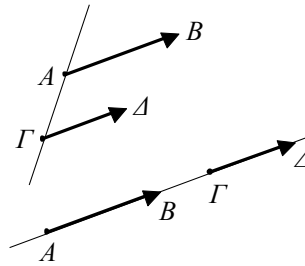
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ έχουν **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\vec{AB} // \vec{\Gamma\Delta}$.



Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε **ομόρροπα** και **αντίρροπα**.

- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα**:

α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία AG που ενώνει τις αρχές τους ή

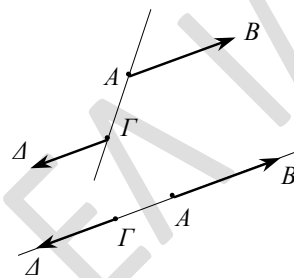


β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$ περιέχει την άλλη. Στην

περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ έχουν την

ίδια κατεύθυνση (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\vec{AB} \uparrow \uparrow \vec{\Gamma\Delta}$.

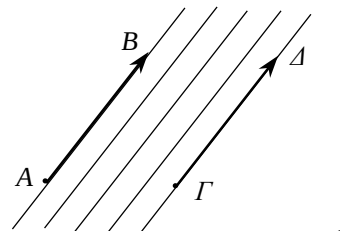
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα**, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{\Gamma\Delta}$.



• Ίσα Διανύσματα

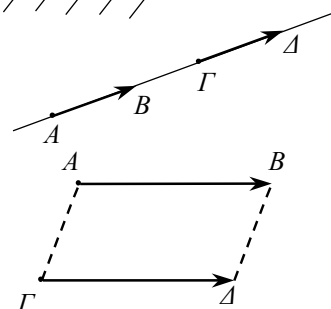
Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$. Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:



Προσοχή !

Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα τότε δε σημαίνει απαραίτητα ότι και τα αντίστοιχα διανύσματα θα είναι ίσα . Δηλαδή , αν

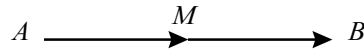


$AB = \Gamma\Delta$ τότε $|\vec{AB}| = |\vec{\Gamma\Delta}|$ **αλλά όχι απαραίτητα** ότι $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$.

- Από μία ισότητα διανυσμάτων προκύπτουν και άλλες ισότητες με εναλλαγή των άκρων , δηλαδή

Αν $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$, τότε $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$ (εναλλαγή μέσων), $\vec{\Delta B} = \vec{\Gamma A}$ (εναλλαγή άκρων) και $\vec{BA} = \vec{\Delta\Gamma}$ (εναλλαγή και μέσων και άκρων).

- Αν M είναι το μέσον του AB , τότε $\vec{AM} = \vec{MB}$ και αντιστρόφως.



Προσοχή !

Το σημείο M αναφέρεται ως μέσο ευθυγράμμου τμήματος και όχι διανύσματος.

• Αντίθετα Διανύσματα

Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε

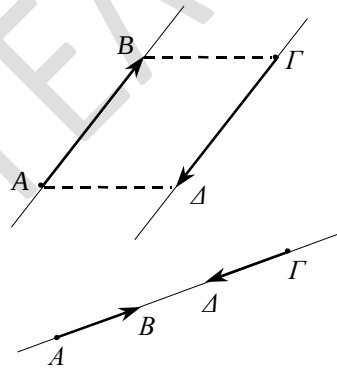
$$\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta} \text{ ή } \vec{\Gamma\Delta} = -\vec{AB}.$$

Είναι φανερό ότι

$$\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$$

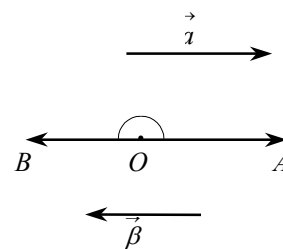
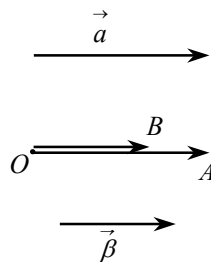
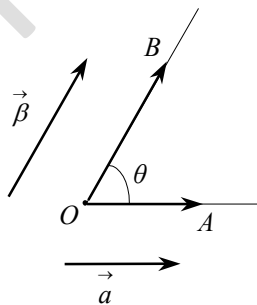
Προφανώς $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

Όμως $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$.



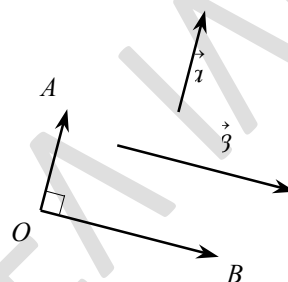
• Γωνία δύο Διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.



Την κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB , την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$** και τη συμβολίζουμε με $(\vec{a}, \vec{b})$ ή $(\vec{b}, \vec{a})$ ή ακόμα, αν δεν προκαλείται σύγχυση, με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα θ . Εύκολα αποδεικνύεται ότι η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου O . Είναι φανερό επίσης ότι $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ή σε ακτίνια $0 \leq \theta \leq \pi$ και ειδικότερα:

- $\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \sin \theta = 1$
- $\theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \sin \theta = -1$
- $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \theta = 0 \quad \eta' \quad \theta = \pi \Leftrightarrow \sin \theta = \pm 1$
- Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{a} \perp \vec{b}$.



- Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0 \leq \theta \leq \pi$. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα, $\vec{0}$, είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.
- Αν $(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$ τότε $(-\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \theta$, $(\vec{a}, -\vec{b}) = \pi - \theta$ και $(-\vec{a}, -\vec{b}) = \theta$
- Για να βρούμε τη γωνία δύο διανυσμάτων **πρέπει να έχουν την ίδια αρχή**. Αν δεν την έχουν, τότε με παράλληλη μεταφορά τα κάνουμε να έχουν και κατόπιν βρίσκουμε τη γωνία τους.

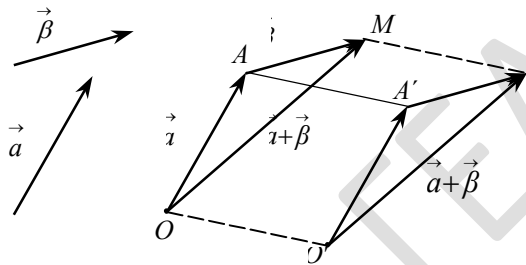
• Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων

Οι πράξεις διανυσμάτων (τουλάχιστον αυτές που θα διδαχθούμε) είναι η πρόσθεση διανυσμάτων , η αφαίρεση διανυσμάτων , ο πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με διάνυσμα και το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (υπάρχει και το εξωτερικό γινόμενο όπως και μικτό γινόμενο διανυσμάτων). Δεν υπάρχει πολλαπλασιασμός ούτε διαίρεση διανυσμάτων και δεν πρέπει να θεωρούμε δεδομένο ότι ιδιότητες των πράξεων που ξέραμε για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν απαραίτητα και για τα διανύσματα.

Πρόσθεση Διανυσμάτων

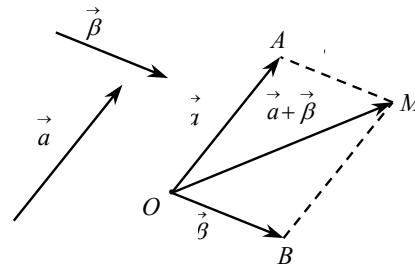
Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\vec{OA}=\vec{a}$ και στη συνέχεια με αρχή το A παίρνουμε διάνυσμα $\vec{AM}=\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\vec{OM}$ λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{a}+\vec{\beta}$.

Το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου O . Δηλαδή αν O' είναι ένα άλλο σημείο και πάρουμε τα διανύσματα $\vec{O'A'}=\vec{a}$ και $\vec{A'M'}=\vec{\beta}$, επειδή $\vec{OA}=\vec{O'A'}=\vec{a}$ και $\vec{AM}=\vec{A'M'}=\vec{\beta}$, έχουμε $\vec{OO'}=\vec{AA'}$ και $\vec{AA'}=\vec{MM'}$. Επομένως, $\vec{OO'}=\vec{MM'}$, που συνεπάγεται ότι και $\vec{OM}=\vec{O'M'}$.



Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο *κανόνα του παραλληλόγραμμου*. Δηλαδή, αν με αρχή ένα

σημείο O πάρουμε τα διανύσματα $\vec{OA}=\vec{a}$ και $\vec{OB}=\vec{\beta}$, τότε το άθροισμα $\vec{a}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο OM του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB .



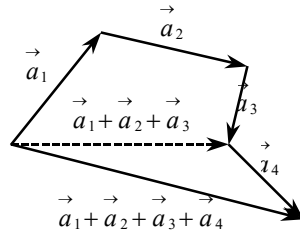
Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε:

- | | | |
|-----|---|----------------------------|
| (1) | $\vec{a}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{a}$ | (Αντιμεταθετική ιδιότητα) |
| (2) | $(\vec{a}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{a}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ | (Προσεταιριστική ιδιότητα) |
| (3) | $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ | |
| (4) | $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$. | |

Παρατηρήσεις

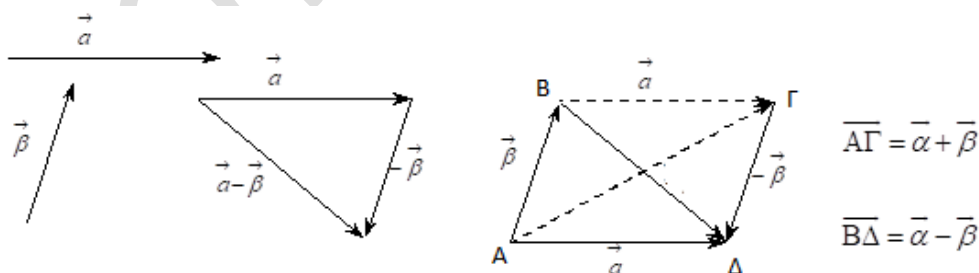
1. Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να συμβολίζουμε καθένα από τα ίσα αθροίσματα $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ και $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ με $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, το οποίο θα λέμε άθροισμα των τριών διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ και $\vec{c}$.
2. Το άθροισμα περισσότερων διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$, $n \geq 3$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_{n-1}) + \vec{a}_n$.
Για παράδειγμα, $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) + \vec{a}_4$



Δηλαδή, για να προσθέσουμε n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$, τα καθιστούμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου. Επειδή μάλιστα ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, το άθροισμα δε μεταβάλλεται αν αλλάξει η σειρά των προσθετέων ή αν μερικοί από αυτούς αντικατασταθούν με το άθροισμά τους.

Αφαίρεση Διανυσμάτων

Η διαφορά $\vec{a} - \vec{b}$ του διανύσματος $\vec{b}$ από το διάνυσμα $\vec{a}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $-\vec{b}$. Δηλαδή $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

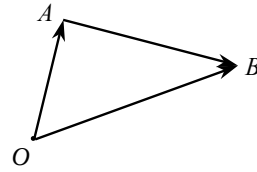


Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο, ώστε $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$. Πράγματι,

$$\vec{b} + \vec{x} = \vec{a} \Leftrightarrow (-\vec{b}) + (\vec{b} + \vec{x}) = (-\vec{b}) + \vec{a} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Διάνυσμα Θέσεως

Έστω O ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο M του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\vec{OM}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του M** ή **διανυσματική ακτίνα του M** . Το σημείο O , που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.



Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{AB}$ έχουμε $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ και επομένως

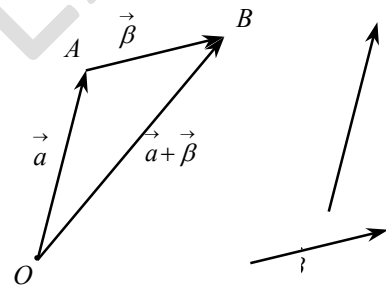
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

Δηλαδή:

“Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής”.

Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε όμως ότι



$$|(OA) - (AB)| \leq (OB) \leq (OA) + (AB)$$

και επομένως για κάθε διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ισχύει ότι $\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Αν αντί για $\vec{b}$ στην παραπάνω σχέση βάλουμε το $-\vec{b}$ έχουμε

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow \nearrow \vec{b}$$

,

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow \swarrow \vec{b}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow \swarrow \vec{b}$$

,

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \Leftrightarrow \vec{a} \nearrow \nearrow \vec{b}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα.

Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$** και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda \vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda| |\vec{\alpha}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

Παρατήρηση

Η πράξη έχει οριστεί ως πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα και όχι το ανάποδο, που σημαίνει ότι στο συμβολισμό της πράξης ο αριθμός προηγείται του διανύσματος. Συνεπώς **δεν έχει νόημα να γράψουμε $\vec{\alpha} \cdot \lambda$**

Ιδιότητες

- (1) $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$
- (2) $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$
- (3) $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

Συνέπειες ορισμού και ιδιοτήτων

- (i) $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{\alpha} = \vec{0}$
- (ii) $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$
- (iii) $\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$
- (iv) $(\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}$
- (v) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$
- (vi) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

Προσοχή

- $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \Rightarrow \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{\alpha} = \vec{\beta}$
- $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha} \Rightarrow \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \text{ ή } \vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu \text{ ή } \vec{\alpha} = \vec{0}$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων.

Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Αν δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, όπου $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, συνδέονται με τη σχέση $\vec{a} = \lambda\vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα αυτά είναι παράλληλα.

Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

Πράγματι, αν θέσουμε $\kappa = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$, τότε $|\vec{a}| = \kappa |\vec{\beta}|$. Συνεπώς:

- Αν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} = \kappa\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} = -\kappa\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{a} = \vec{0}$, τότε $\vec{a} = 0 \cdot \vec{\beta}$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση υπάρχει λ και μάλιστα μοναδικός, τέτοιος, ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{\beta}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Σχόλιο

1. Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε

- $\vec{a} \nearrow \nearrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{\beta}, \lambda \geq 0$
- $\vec{a} \nearrow \searrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{\beta}, \lambda \leq 0$

2. Για να δείξω ότι 3 σημεία είναι συνευθειακά αρκεί να δείξω ότι δύο διανύσματα με άκρα από αυτά είναι παράλληλα

Π.χ για να δείξω ότι A, B, Γ συνευθειακά αρκεί να δείξω ότι $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$ ή $\overrightarrow{A\Gamma} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$ ή $\overrightarrow{A\Gamma} \parallel \overrightarrow{AB}$

Βασική Πρόταση

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα (δηλαδή όχι παράλληλα) και ισχύει ότι $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\kappa = \lambda = 0$.

Απόδειξη

Αν $\kappa \neq 0$ τότε από τη δοσμένη σχέση έχουμε

$$\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \kappa\vec{\alpha} = -\lambda\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \text{ πράγμα άτοπο αφού } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ είναι μη}$$

συγγραμμικά. Συνεπώς $\kappa = 0$ οπότε πάλι από τη δοσμένη σχέση έχουμε

$$\lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0}$$

Αν όμως ίσχυε ότι $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε θα ήταν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, δεδομένου ότι το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται παράλληλο σε κάθε διάνυσμα, πράγμα πάλι άτοπο.

Συνεπώς πρέπει $\lambda = 0$ οπότε τελικά $\kappa = \lambda = 0$.

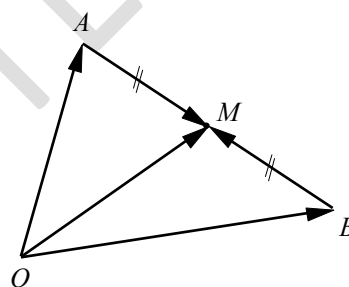
Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

Ας πάρουμε ένα διάνυσμα $\vec{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O . Για τη διανυσματική ακτίνα $\vec{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} \text{ και } \vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM}.$$

Επομένως, $2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} + \vec{OB} + \vec{BM} = \vec{OA} + \vec{OB}$. Άρα

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$



Σχόλιο

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι :

A) η διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός τμήματος ισούται με το ημιάθροισμα των διανυσματικών ακτινών των άκρων

B) το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών δύο σημείων είναι το διπλάσιο της διανυσματικής ακτίνας του μέσου τους.

Π.χ $\vec{AB} + \vec{AG} = 2\vec{AM}$, όπου M το μέσο του BG

$\vec{KL} + \vec{KM} = 2\vec{KN}$, όπου N το μέσο του LM

$\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PT}$, όπου T το μέσο του AB

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Άξονας

Άξονα με αρχή το O και μοναδιαίο διάνυσμα το $\vec{OI} = \vec{i}$ και τον συμβολίζουμε με $x'x$ ονομάζουμε μια ευθεία $x'x$ πάνω στην οποία έχουμε επιλέξει σημεία O και I , έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{OI}$ να έχει μέτρο 1 και να βρίσκεται στην ημιευθεία Ox .

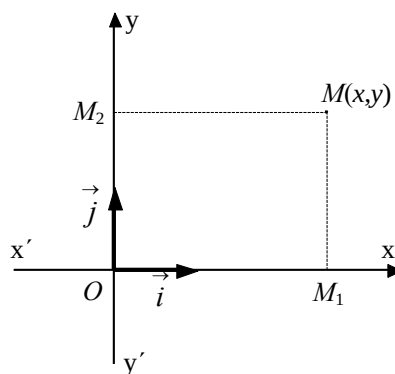
Η ημιευθεία Ox λέγεται **θετικός ημιάξονας Ox** , ενώ η Ox' λέγεται **αρνητικός ημιάξονας Ox'** .



Αν, τώρα, πάνω στον άξονα $x'x$ πάρουμε ένα σημείο M , επειδή $\vec{OM} \parallel \vec{i}$, θα υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε $\vec{OM} = x \cdot \vec{i}$. Τον αριθμό x τον ονομάζουμε **τετμημένη** του M . Αλλά και αντιστρόφως, από την ισότητα $\vec{OM} = x \cdot \vec{i}$ προκύπτει ότι σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχεί μοναδικό σημείο M του άξονα $x'x$ με τετμημένη x . Το σημείο αυτό συμβολίζεται με $M(x)$.

Καρτεσιανό Επίπεδο

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$. Λέμε τότε ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή απλούστερα ένα **σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή ακόμα ένα **καρτεσιανό επίπεδο** και το συμβολίζουμε με Oxy . Το σύστημα Oxy λέγεται ορθοκανονικό, γιατί είναι ορθογώνιο και κανονικό. Ορθογώνιο είναι, γιατί οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι κάθετοι, και κανονικό, γιατί τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι ισομήκη.



Πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παίρνουμε ένα σημείο M . Από το M φέρνουμε την παράλληλη στον $y'y$, που τέμνει τον $x'x$ στο M_1 , και την παράλληλη στον $x'x$, που τέμνει τον $y'y$ στο M_2 . Αν x είναι η τετμημένη του M_1 ως προς τον άξονα $x'x$ και y η τετμημένη του M_2 ως προς τον άξονα $y'y$, τότε ο x λέγεται **τετμημένη** του M και ο y **τεταγμένη** του M . Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται **συντεταγμένες του M** . Έτσι σε κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος συντεταγμένων.

Αλλά και αντιστρόφως σε κάθε ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί μοναδικό σημείο του επιπέδου, το οποίο βρίσκεται ως εξής: Πάνω στον άξονα $x'x$ παίρνουμε το

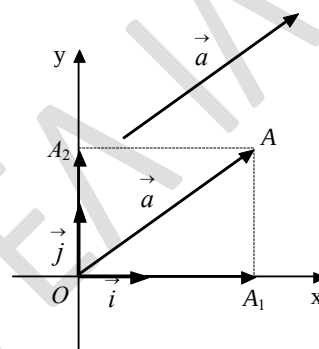
σημείο $M_1(x)$ και στον $y'y$ το σημείο $M_2(y)$. Από τα M_1 και M_2 φέρνουμε παράλληλες στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντιστοίχως, που τέμνονται στο M . Το σημείο M είναι το ζητούμενο. Ένα σημείο M με τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται και με $M(x, y)$ ή απλά με (x, y) .

Συντεταγμένες Διανύσματος

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{a}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το O σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{a}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε: $\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$ (1)

Αν x, y είναι οι συντεταγμένες του A , τότε ισχύει $\vec{OA_1} = x\vec{i}$ και $\vec{OA_2} = y\vec{j}$. Επομένως η ισότητα (1) γράφεται $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι το $\vec{a}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.



Στην παραπάνω κατασκευή οι αριθμοί x και y είναι μοναδικοί.

Απόδειξη

Πράγματι, έστω ότι ισχύει και $\vec{a} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

Τότε θα έχουμε $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Rightarrow (x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}$

Αν υποθέσουμε ότι $x \neq x'$, δηλαδή ότι $x - x' \neq 0$, τότε θα ισχύει $\vec{i} = \frac{y' - y}{x - x'} \vec{j}$

Η σχέση αυτή, όμως, δηλώνει ότι $\vec{i} \parallel \vec{j}$, που είναι άτοπο, αφού τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δεν είναι συγγραμμικά. Επομένως $x = x'$, που συνεπάγεται ότι και $y = y'$. Όστε:

Κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Τα διανύσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\vec{a}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντιστοίχως, ενώ οι αριθμοί x, y λέγονται **συντεταγμένες** του $\vec{a}$ στο σύστημα Oxy . Πιο συγκεκριμένα, ο x λέγεται **τετμημένη** του $\vec{a}$ και ο y λέγεται **τεταγμένη** του $\vec{a}$. Από τον τρόπο που ορίστηκαν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος προκύπτει ότι:

“Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες”.

Καθένα από τα ίσα διανύσματα με τετμημένη x και τεταγμένη y , θα το συμβολίζουμε με το διατεταγμένο ζεύγος (x, y) .

Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ του καρτεσιανού επιπέδου, τότε μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες του αθροίσματος $\vec{a} + \vec{b}$, του γινομένου $\lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ και γενικά κάθε γραμμικού συνδυασμού των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Πράγματι, αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$, τότε έχουμε:

- $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) + (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j}$
- $\lambda \vec{a} = \lambda(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) = (\lambda x_1) \vec{i} + (\lambda y_1) \vec{j}$

Επομένως $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ και $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ ή ισοδύναμα

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

Γενικότερα, για το γραμμικό συνδυασμό $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ έχουμε:

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_2, \mu y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$

Για παράδειγμα, αν $\vec{a} = (1, -1)$ και $\vec{b} = (1, 2)$, τότε

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, -1) + (1, 2) = (2, 1),$$

$$2\vec{a} = 2(1, -1) = (2, -2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, -1) - (1, 2) = (1, -1) + (-1, -2) = (0, -3),$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2(1, -1) - (1, 2) = (2, -2) + (-1, -2) = (1, -4)$$

Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB .

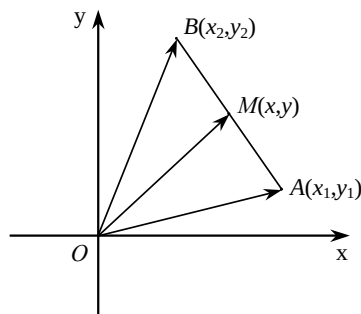
Επειδή $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$, και

$$\vec{OM} = (x, y), \quad \vec{OA} = (x_1, y_1), \quad \vec{OB} = (x_2, y_2),$$

έχουμε

$$(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Επομένως ισχύει



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του

διανύσματος $\vec{AB}$. Επειδή, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$,

$$\vec{AB} = (x, y),$$

$$\vec{OB} = (x_2, y_2), \text{ και } \vec{OA} = (x_1, y_1),$$

έχουμε:

$$(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Επομένως:

Οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad y = y_2 - y_1.$$

Δηλαδή

τετμημένη του $\vec{AB}$ = τετμημένη του B - τετμημένη του A

τεταγμένη του $\vec{AB}$ = τεταγμένη του B - τεταγμένη του A .

Για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{AB}$ με αρχή το $A(1, 2)$ και πέρας το $B(3, 7)$ έχει συντεταγμένες $x = 3 - 1 = 2$ και $y = 7 - 2 = 5$, δηλαδή είναι ίσο με το $\vec{a} = (2, 5)$.

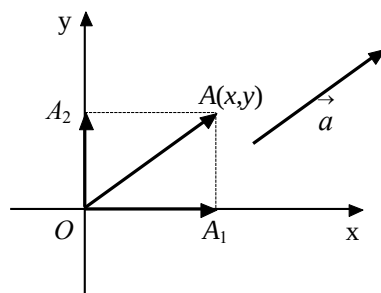
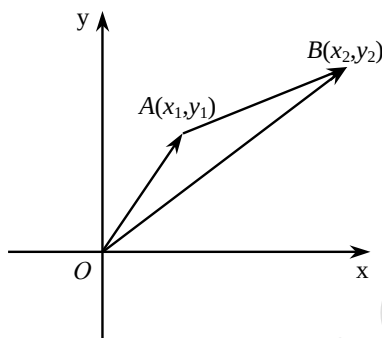
Μέτρο Διανύσματος

- Έστω $\vec{a} = (x, y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και A το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\vec{OA} = \vec{a}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες x' και y' αντιστοίχως, επειδή το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y , θα ισχύει $(OA_1) = |x|$ και $(OA_2) = |y|$. Έτσι θα έχουμε:

$$|\vec{a}|^2 = (OA)^2 = (OA_1)^2 + (A_1A)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2.$$

Επομένως: Αν $\vec{a} = (x, y)$, τότε $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

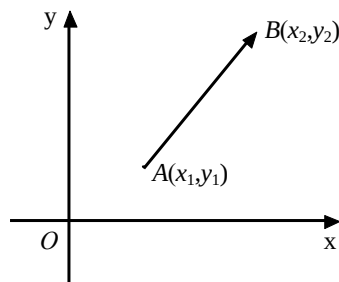
Για παράδειγμα, αν $\vec{a} = (5, 12)$, τότε $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.



Απόσταση δύο σημείων στο επίπεδο

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Επειδή η απόσταση (AB) των σημείων A και B είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, σύμφωνα με τον τύπο (1) θα ισχύει:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$



Επομένως:

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

Για παράδειγμα, η απόσταση των σημείων $A(2, -7)$ και $B(5, -3)$ είναι ίση με $(AB) = \sqrt{(5-2)^2 + (-3+7)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Παρατηρήσεις

- Οι αποστάσεις ενός σημείου $M(x, y)$ από τους άξονες xx' και yy' αντίστοιχα είναι $|y|$, $|x|$
- Το συμμετρικό ενός σημείου $M(x, y)$
 - ως προς τον xx' είναι $(x, -y)$,
 - ως προς τον yy' είναι $(-x, y)$,
 - ως προς την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ είναι $(-x, -y)$
 - ως προς τη διχτόμο των γωνιών $\chi O \psi$ και $\chi' O \psi'$ είναι (y, x)
- Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε

$$\vec{\alpha} \parallel \chi\chi' \Leftrightarrow y = 0 \quad , \quad \vec{\alpha} \parallel \psi\psi' \Leftrightarrow x = 0$$
- Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε $-\vec{\alpha} = (-x, -y)$
- Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } y = 0$
Ενώ $\vec{\alpha} \neq \vec{0} \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ ή } y \neq 0$
- Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$
Ενώ $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \text{ ή } y_1 \neq y_2$

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου.

Την ορίζουσα $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$, που έχει ως 1η τη γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}$ και ως 2η γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{b}$, τη λέμε **ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$** (με τη σειρά που δίνονται) και θα τη συμβολίζουμε με $\det(\vec{a}, \vec{b})$. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

Για παράδειγμα:

1. Τα διανύσματα $\vec{a} = (\sqrt{3}, -1)$ και $\vec{b} = (3, -\sqrt{3})$ είναι παράλληλα, αφού

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0, \text{ ενώ}$$

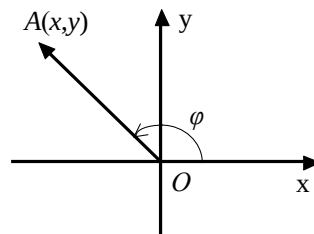
2. Τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$ και $\vec{b} = (-1, 2)$ δεν είναι παράλληλα, αφού

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0.$$

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

Έστω $\vec{a} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A το

σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\vec{OA} = \vec{a}$. Τη γωνία φ , που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίσει με την ημιευθεία OA , την ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τον άξονα $x'x$** .



Είναι φανερό ότι $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Για τη γωνία φ , όπως είναι γνωστό από την Τριγωνομετρία, αν το $\vec{a}$ δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, ισχύει $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x}$. Το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$, με $x \neq 0$, το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{a}$ και τον συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{a}}$ ή απλώς με λ .

Επομένως: $\lambda = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\varphi$

Είναι φανερό ότι

- Αν $y=0$, δηλαδή αν $\vec{a} // x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{a}$ είναι ο $\lambda=0$.
- Αν $x=0$, δηλαδή αν $\vec{a} // y'y$, τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{a}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διανύσματα $\vec{a}=(x_1, y_1)$ και $\vec{b}=(x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

Επομένως, η συνθήκη παραλληλίας για δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 διατυπώνεται ως εξής:

$$\boxed{\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2}$$

Παρατηρήσεις

1. Αν $\vec{a}=(x_1, y_1)$ και $\vec{b}=(x_2, y_2)$ τότε ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} & , \lambda \in \mathbb{R} \\ \vec{b} = \kappa \cdot \vec{a} & , \kappa \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 & \text{και} & y_1 = \lambda \cdot y_2 & , \lambda \in \mathbb{R} \\ x_2 = \kappa \cdot x_1 & \text{και} & y_2 = \kappa \cdot y_1 & , \kappa \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \det(\vec{a} // \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{b}} \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad \text{εφόσον} \quad x_1, x_2 \neq 0$$

2. Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ και

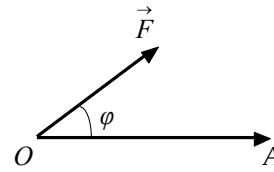
$$\text{αν } x_1 \neq x_2 \quad \text{τότε} \quad \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{αν } x_1 = x_2 \quad \text{τότε} \quad \lambda_{\overrightarrow{AB}} \text{ δεν ορίζεται}$$

$$\text{αν } y_1 = y_2 \text{ και } x_1 \neq x_2 \quad \text{τότε} \quad \lambda_{\overrightarrow{AB}} = 0$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Γνωρίζουμε ότι το έργο που παράγεται από μια δύναμη $\vec{F}$ όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από το O στο A είναι ίσο με το γινόμενο $|\vec{F}| \cdot (OA) \cdot \sin\varphi$. Το γινόμενο αυτό συμβολίζεται με $\vec{F} \cdot \vec{OA}$ και λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** της δύναμης $\vec{F}$ με το διάνυσμα $\vec{OA}$. Γενικότερα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:



ΟΡΙΣΜΟΣ

- Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{a} \cdot \vec{b}$ τον **πραγματικό αριθμό**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi,$$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

- Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$ και $\varphi = \frac{\pi}{3}$ είναι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 8 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 12$.

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $\vec{a} \perp \vec{b}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ και αντιστρόφως.

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{a}$ συμβολίζεται με $\vec{a}^2$ και λέγεται **τετράγωνο του $\vec{a}$** .

Έχουμε: $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \sin 0 = |\vec{a}|^2$. Επομένως $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

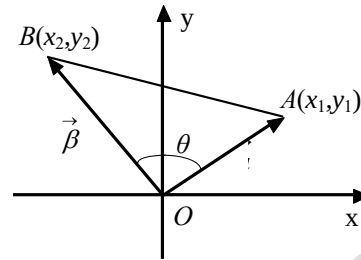
Ειδικότερα, για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ του καρτεσιανού επιπέδου ισχύουν:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \quad \text{και} \quad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$$

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να εκφράσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$



Δηλαδή:

“Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομόνυμων συντεταγμένων τους”.

Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha} = (-3, 4)$ και $\vec{\beta} = (2, -1)$ είναι:
 $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (-3) \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = -10$.

Ιδιότητες

- $\lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}), \lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα)
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$ όπου $\lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta} // y^* x^*)$

Απόδειξη

Πράγματι, αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$, τότε έχουμε:

- $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1) \cdot (x_2, y_2) = (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 = \lambda(x_1 x_2 + y_1 y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$ και
 $\vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = (x_1, y_1) \cdot (\lambda x_2, \lambda y_2) = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda(x_1 x_2 + y_1 y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$.

Άρα, $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$

- $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3)$
 $= (x_1 x_2 + x_1 x_3) + (y_1 y_2 + y_1 y_3) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 x_3 + y_1 y_3)$
 $= \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 y_2 = -x_1 x_2 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που

σχηματίζουν γωνία θ , τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \theta$ και επομένως, $\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}$.

Είναι όμως $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

Επομένως, $\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Για παράδειγμα, αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (3,1)$, τότε:

$$\cos\theta = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ οπότε } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Παρατηρήσεις

1. Για το εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύουν όλες οι ιδιότητες που ισχύουν στον πολλαπλασιασμό δύο πραγματικών αριθμών. Ας δούμε μερικές ιδιότητες που γενικά δεν ισχύουν :

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) &\neq (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \\ (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 &\neq \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2 \\ |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| &\neq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|\end{aligned}$$

όμως **ισχύουν**

$$\begin{aligned}[(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}] \cdot \vec{\delta} &= (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}) \\ (|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|)^2 &= |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2\end{aligned}$$

2. Δεδομένου ότι δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα δεν έχει νόημα και δύναμη διανύσματος μεγαλύτερη του 2, δηλαδή $\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\alpha} \neq \vec{\alpha}^3$ δεδομένου ότι το 2^ο μέλος δεν έχει καν νόημα

3. Δεν ορίζεται πηλίκο διανυσμάτων οπότε πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν κάνουμε απλοποιήσεις

Π.χ. το $\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}$ ορίζεται ως πηλίκο αριθμών αλλά το $\frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}}$ δεν ορίζεται οπότε $\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \neq \frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}}$ αφού το 2^ο μέλος δεν έχει καν νόημα

$$4. \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$$

5. Να αποδειχτεί ότι: (i) $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ (ii) $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \leq \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$
Πότε ισχύουν οι ισότητες;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- (i) Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε έχουμε:

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos\theta = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\cos\theta| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο, αν $\cos\theta = \pm 1$, δηλαδή, μόνο αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

$$(ii) \text{ Επίσης, έχουμε } (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|^2 \leq (|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|)^2 = |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2.$$

Η ισότητα ισχύει, όπως και προηγουμένως, μόνο όταν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.