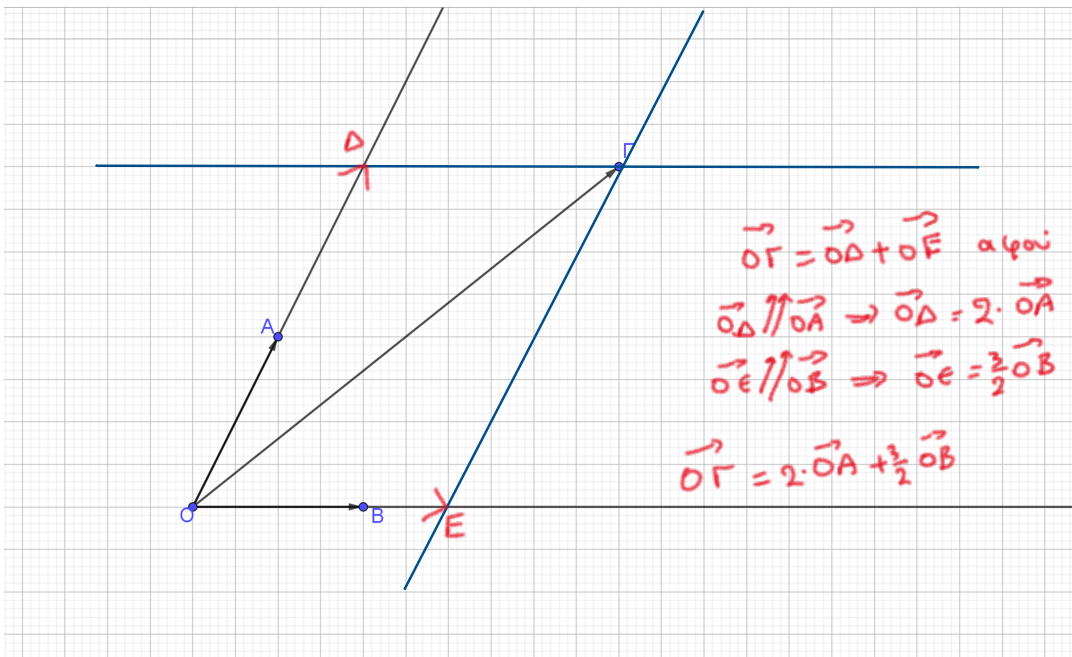


Θέμα 1ο Με βάση το παρακάτω σχήμα να γράψετε το διάνυσμα $\vec{OG}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{OA}, \vec{OB}$



Αν $\vec{a}, \vec{b}$ είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα

(δηλαδή όχι παράλληλα) και ισχύει ότι $k\vec{a} + \lambda\vec{b} = \vec{0}$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $k = \lambda = 0$.

Απόδειξη

$$\vec{a} \not\parallel \vec{b}, \quad k\vec{a} + \lambda\vec{b} = \vec{0}$$

Έστω $k \neq 0$. Τότε $k\vec{a} = -\lambda\vec{b} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{\lambda}{k}\vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$. Αποκλείεται.
 Επειδή $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$, Άρα $\boxed{k=0}$ και έστω $0 \cdot \vec{a} + \lambda\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\lambda=0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$ Απορριπτεται διότι $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$
 Τελικά $k = \lambda = 0$.

Κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ **Απόδειξη**

$$\text{Έστω } \vec{x} = k\vec{u} + \lambda\vec{v} \quad \text{και} \quad \vec{x} = k'\vec{u} + \lambda'\vec{v}, \quad k, \lambda, k', \lambda' \in \mathbb{R}$$

$$\text{Θ.Σ.} \quad k = k' \quad \text{και} \quad \lambda = \lambda'.$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{x} &= k\vec{u} + \lambda\vec{v} \\ \vec{x} &= k'\vec{u} + \lambda'\vec{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k\vec{u} + \lambda\vec{v} = k'\vec{u} + \lambda'\vec{v} \Rightarrow$$

$$1 \rightarrow -2 \Rightarrow$$

είναι

$$\vec{x} = \kappa' \vec{u} + \lambda' \vec{v}$$

$$\kappa \vec{u} + \lambda \vec{v} - \kappa' \vec{u} - \lambda' \vec{v} = \vec{0}$$

$$(\kappa - \kappa') \vec{u} + (\lambda - \lambda') \vec{v} = \vec{0} \quad \vec{u} \neq \vec{v}$$

$$\kappa - \kappa' = 0 \quad \text{και} \quad \lambda - \lambda' = 0$$

$$\boxed{\kappa = \kappa'} \quad \boxed{\lambda = \lambda'}$$

Θέμα 2ο Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα να βρείτε τους αριθμούς κ, λ στις δυτλανές ισότητες	$(\kappa - 2) \cdot \vec{\alpha} + (\lambda - 3) \cdot \vec{\beta} = \vec{0}$ αφού $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ $\kappa - 2 = 0$ και $\lambda - 3 = 0$	$(\kappa + 2) \cdot \vec{\alpha} + (\lambda + 3) \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot \vec{\alpha} - 5 \cdot \vec{\beta}$ αφού $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ $\kappa + 2 = 2$ και $\lambda + 3 = -5$
	$\boxed{\kappa = 2}$ $\boxed{\lambda = 3}$	$\boxed{\kappa = 0}$ $\boxed{\lambda = -8}$

Θέμα 3ο Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να προσδιοριστούν οι $\chi, \psi \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = \chi\overrightarrow{A\Gamma} + \psi\overrightarrow{BD}$	
Υπόδειξη : Επιλέγουμε δύο μη <u>συγγραμμικά</u> διανύσματα και εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της δοσμένης σχέσης ως γραμμικό συνδυασμό αυτών.	
Λύση Εκφράζω όλα τα διανύσματα της δοσμένης σχέσης ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ Είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ οπότε η δοσμένη	

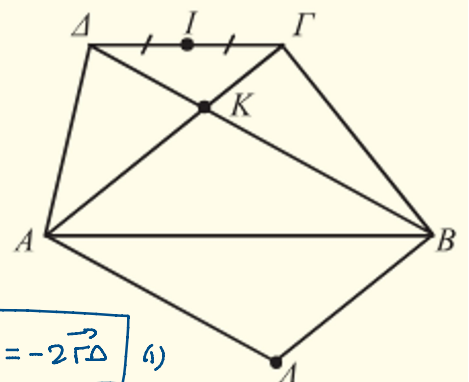
σχέση γίνεται: $\vec{AB} + 3\vec{AD} = \chi \cdot (\vec{AB} + \vec{AD}) + \psi (\vec{AD} - \vec{AB}) \Rightarrow$

$$\vec{AB} + 3\vec{AD} = \chi \vec{AB} + \chi \vec{AD} + \psi \vec{AD} - \psi \vec{AB}$$

$$\vec{AB} + 3\vec{AD} = (\chi - \psi) \vec{AB} + (\chi + \psi) \vec{AD} \quad \vec{AB} \not\parallel \vec{AD}$$

$$\left. \begin{array}{l} \chi - \psi = 1 \\ \chi + \psi = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} 2\chi = 4 \Rightarrow \boxed{\chi = 2} \text{ και } \boxed{\psi = 1}$$

9. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με $(AB) = 2(\Gamma\Delta)$, το $K\Lambda\Lambda B$ παραλληλόγραμμο και το I μέσο του $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
- (i) $\vec{K\Gamma} = -\frac{1}{2} \vec{K\Lambda}$ και $\vec{K\Delta} = -\frac{1}{2} \vec{KB}$
- (ii) τα σημεία I, K, Λ είναι συνευθειακά.



$$(AB) = 2(\Gamma\Delta) \Rightarrow |\vec{AB}| = 2|\vec{\Gamma\Delta}| \Rightarrow \boxed{\vec{AB} = -2\vec{\Gamma\Delta}} \quad (*)$$

Αν' το σχήμα $\Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{\Gamma\Delta}$

Αν το σχήμα $\Rightarrow \vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{FD}$

$$\begin{aligned} \vec{KA} // \vec{KF} &\Rightarrow \vec{KA} = \lambda \cdot \vec{KF} \quad (2) \\ \vec{KD} // \vec{KB} &\Rightarrow \vec{KD} = \mu \cdot \vec{KB} \quad (3) \end{aligned}$$

$$c) \Rightarrow \vec{AB} = -2\vec{FD} \Rightarrow \vec{KB} - \vec{KA} = -2(\vec{KD} - \vec{KF}) \Rightarrow$$

$$\vec{KB} - \vec{KA} = -2\vec{KD} + 2\vec{KF} \xrightarrow{(2)}$$

$$\vec{KB} - \lambda \vec{KF} = -2\mu \vec{KB} + 2\vec{KF} \xrightarrow{(3)} \vec{KB} \neq \vec{KF}$$

$$\begin{aligned} 1 &= -2\mu \quad \text{και} \quad -\lambda = 2 \\ \mu &= -\frac{1}{2} \quad \lambda = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{KD} &= -\frac{1}{2} \vec{KB} \quad \text{και} \\ \vec{KA} &= -2\vec{KF} \Rightarrow \\ \vec{KF} &= -\frac{1}{2} \vec{KA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \perp \text{ στο } \Gamma\Delta &\Rightarrow \frac{\vec{KI} = \vec{KF} + \vec{KD}}{2} \Rightarrow \vec{KF} + \vec{KD} = 2\vec{KI} \\ \text{και } \perp \text{ στο } \Lambda\Gamma &\Rightarrow \vec{KA} = \vec{KI} + \vec{KB} \Rightarrow \vec{KA} = -2\vec{KF} - 2\vec{KB} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} ii) \perp \text{ στο } \Gamma\Delta \\ \text{και } \perp \text{ στο } \Lambda\Gamma \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$$\vec{KA} = -4\vec{KI} \Rightarrow \vec{KA} // \vec{KI} \Rightarrow K, \Lambda, I \text{ συνευθειακά.}$$