

Μάθημα 12ο -Λύση εργασίας 4

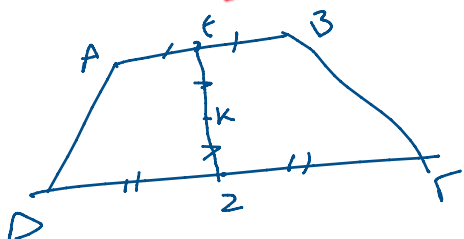
Θέμα 1°

Έστω τετράπλευρο ABΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα.
Αν Κ είναι το μέσο του ΕΖ να δείξετε ότι :

i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} = 4\overrightarrow{AK}$

ii) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{K\Delta} = \vec{0}$

i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AZ} = 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ}) = 2 \cdot 2\overrightarrow{AK} = 4\overrightarrow{AK}$



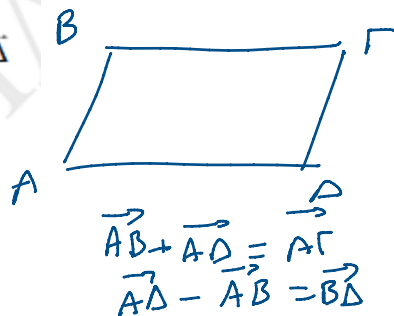
ii) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{K\Delta} =$
 $2 \cdot \overrightarrow{KE} + 2 \cdot \overrightarrow{KZ} = 2(\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KZ}) =$
 $= 2 \cdot 2 \cdot \overrightarrow{KK} = \vec{0}$

Θέμα 2ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Αν ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = \chi\overrightarrow{A\Gamma} + \psi\overrightarrow{BD}$

α) Να αποδείξετε ότι $(1 - \chi + \psi)\overrightarrow{AB} + (3 - \chi - \psi)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

β) Να βρείτε τις τιμές των χ, ψ .



a) $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = \chi\overrightarrow{A\Gamma} + \psi\overrightarrow{BD}$
 $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = \chi(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \psi(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$
 $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = \chi\overrightarrow{AB} + \chi\overrightarrow{AD} + \psi\overrightarrow{AD} - \psi\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} - \chi\overrightarrow{AB} + \psi\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} - \chi\overrightarrow{AD} - \psi\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

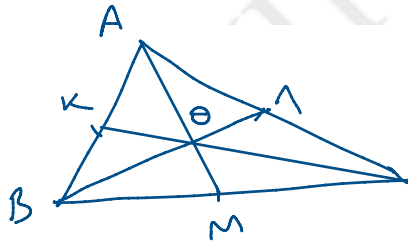
$(1 - \chi + \psi)\overrightarrow{AB} + (3 - \chi - \psi)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

b) Γράφουμε $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD} \rightarrow \begin{cases} 1 - \chi + \psi = 0 \\ 3 - \chi - \psi = 0 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} -2\chi = 0 \Rightarrow \chi = 2 \\ \psi = 1 \end{cases}$

Θέμα 3°

Να αποδείξετε ότι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου διαιρεί κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα, από τα οποία το ένα έχει διπλάσιο μήκος από το άλλο.

Υπόδειξη : Θεωρείστε τρίγωνο $AB\Gamma$ και K, Λ, M τα μέσα των $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν Θ το σημείο τομής των $\Gamma K, B\Lambda$ τότε ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\Gamma\Theta} = \lambda \cdot \vec{\Gamma K}$, $\vec{B\Theta} = \mu \cdot \vec{B\Lambda}$ και $\vec{B\Theta} + \vec{\Theta\Gamma} + \vec{\Gamma B} = \vec{0}$ από την οποία αφού τα εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ θα προκύψει ότι $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$



$$\begin{aligned} \vec{\Gamma\Theta} // \vec{\Gamma K} &\Rightarrow \vec{\Gamma\Theta} = \lambda \cdot \vec{\Gamma K} \quad (1) \\ \vec{B\Theta} // \vec{B\Lambda} &\Rightarrow \vec{B\Theta} = \mu \cdot \vec{B\Lambda} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\vec{B\Theta} + \vec{\Theta\Gamma} + \vec{\Gamma B} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\mu \vec{B\Lambda} - \lambda \vec{\Gamma K} + \vec{\Gamma B} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\mu \left(\frac{\vec{BA} + \vec{B\Gamma}}{2} \right) - \lambda \left(\frac{\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}}{2} \right) + \vec{\Gamma B} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\mu \left(\frac{\vec{BA} + \vec{A\Gamma} - \vec{AB}}{2} \right) - \lambda \left(\frac{\vec{\Gamma A} + \vec{AB} - \vec{A\Gamma}}{2} \right) + \vec{AB} - \vec{A\Gamma} = \vec{0}$$

$$\mu \frac{\vec{A\Gamma} - 2\vec{AB}}{2} - \lambda \frac{\vec{AB} - 2\vec{A\Gamma}}{2} + \vec{AB} - \vec{A\Gamma} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2\lambda}{2} - 1 \right) \vec{A\Gamma} + \left(-\frac{2\mu}{2} - \frac{\lambda}{2} + 1 \right) \vec{AB} = \vec{0}$$

$$\vec{A\Gamma} \not\parallel \vec{AB} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mu}{2} + \frac{2\lambda}{2} - 1 = 0 \\ -\frac{2\mu}{2} - \frac{\lambda}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \frac{2}{3}$$

Θέμα 4°

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει :

A) $|\vec{MA} + \vec{M\Gamma}| = |\vec{MB} + \vec{M\Delta}|$ B) $|\vec{MA} + \vec{M\Gamma}| = |\vec{MB} - \vec{M\Delta}|$

Γ) $|\vec{MA}| + |\vec{MB}| = |\vec{AB}|$ Δ) $||\vec{MA}| - |\vec{MB}|| = |\vec{AB}|$ E) $|\vec{MA}| - |\vec{MB}| = |\vec{AB}|$

$$\begin{aligned} \text{A) } |\vec{MA} + \vec{M\Gamma}| &= |\vec{MB} + \vec{M\Delta}| \Rightarrow |2 \cdot \vec{MK}| = |2 \cdot \vec{ML}| \\ &\Rightarrow 2|\vec{MK}| = 2|\vec{ML}| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$A) |\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + \vec{MB}|$$

όπου κ μέσο ΑΓ

όπου λ μέσο ΒΔ

$$\Rightarrow 2|\vec{MK}| = 2|\vec{ML}| \Rightarrow$$

$$|\vec{MK}| = |\vec{ML}| \Rightarrow \text{το } M \text{ ισχύει από τα } \kappa, \lambda \text{ οπότε ανήκει}$$

στον μεσοκαθέτο του Κ

$$B) |\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MB} - \vec{MA}| \Rightarrow |2 \cdot \vec{MK}| = |\vec{AB}| \Rightarrow$$

$$|\vec{MK}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \Rightarrow \text{το } M \text{ ανήκει από το } K$$

στοθερή απόσταση ίση με $\frac{|\vec{AB}|}{2}$

οπότε ανήκει στο κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα $\frac{|\vec{AB}|}{2}$

$$\gamma) |\vec{MA}| + |\vec{MB}| = |\vec{AB}| \Rightarrow |\vec{MA}| + |\vec{MB}| = |\vec{MB} - \vec{MA}| \Rightarrow$$

$$\vec{MA} \uparrow \downarrow \vec{MB}$$



οπότε το Μ ανήκει στο τμήμα ΑΒ

$$\delta) \left| |\vec{MA}| - |\vec{MB}| \right| = |\vec{AB}| \Rightarrow \left| |\vec{MA}| - |\vec{MB}| \right| = |\vec{MB} - \vec{MA}| \Rightarrow$$

$$\vec{MA} \uparrow \uparrow \vec{MB}$$



Μ ανήκει στις ημιευθείες Αx και By

$$\epsilon) |\vec{MA}| - |\vec{MB}| = |\vec{AB}| \Rightarrow |\vec{MA}| - |\vec{MB}| = |\vec{MB} - \vec{MA}| \Rightarrow$$

$$|\vec{MA}| \geq |\vec{MB}| \text{ και } \vec{MA} \uparrow \uparrow \vec{MB}$$



Μ ανήκει στην ημιευθεία By.