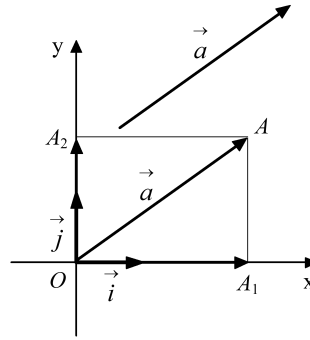


Μάθημα 13ο - Συντεταγμένες στο επίπεδο

• Καρτεσιανό Επίπεδο

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$. Λέμε τότε ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή απλούστερα ένα **σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή ακόμα ένα **καρτεσιανό επίπεδο** και το συμβολίζουμε με Oxy .



• Συντεταγμένες διανύσματος

Κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}, \vec{j}$ δηλαδή στη μορφή $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. Τα διανύσματα $x \cdot \vec{i}, y \cdot \vec{j}$ λέγονται συνιστώσες του $\vec{a}$. Ο x λέγεται τετμημένη του $\vec{a}$ και ο y τεταγμένη του $\vec{a}$ ενώ και οι δυο μαζί λέγονται συντεταγμένες του $\vec{a}$. Συμβολίζουμε $\vec{a} = (x, y)$.

Θέμα 1ο Να βρείτε τις συν/νες του $\vec{a}$ στις παρακάτω περιπτώσεις

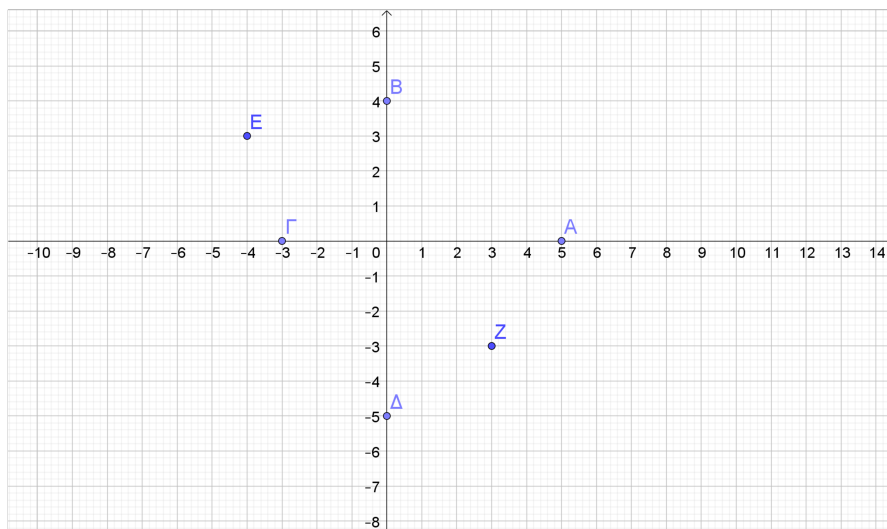
$$\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (\dots, \dots) \quad , \quad \vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (\dots, \dots)$$

$$\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} \Rightarrow \vec{a} = (\dots, \dots) \quad , \quad \vec{a} = -3 \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (\dots, \dots)$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \text{ όπου } A(-2, 3) \Rightarrow \vec{a} = (\dots, \dots)$$

Θέμα 2ο Με βάση το παρακάτω σχήμα να εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των

$\vec{i}, \vec{j}$ τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B, Γ, Δ, E, Z και των $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BZ}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{Z\Delta}$



$$\begin{aligned} \vec{OA} &= 5\vec{i} \\ \vec{OB} &= 4\vec{j} \\ \vec{O\Gamma} &= -3\vec{i} \\ \vec{OD} &= -5\vec{j} \\ \vec{OE} &= -4\vec{i} + 3\vec{j} \\ \vec{OZ} &= 3\vec{i} - 3\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AE} &= \vec{OE} - \vec{OA} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{i} \\ &= -9\vec{i} + 3\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{BZ} &= \vec{OZ} - \vec{OB} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{j} \\ &= 3\vec{i} - 7\vec{j} \end{aligned}$$

$$\vec{\Gamma\Delta} = \vec{OD} - \vec{O\Gamma} = -5\vec{j} + 3\vec{i} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 4\vec{j} - 5\vec{i} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{Z\Delta} = \vec{OD} - \vec{OZ} = -5\vec{j} - 3\vec{i} + 3\vec{j} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$$

- Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συν/νες τους είναι ίσες και αντίθετα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συν/νες τους είναι αντίθετες, δηλαδή αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε
 $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$
 $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \text{ και } y_1 = -y_2$
 $\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ και } y_1 = 0$

$$\vec{0} = (0, 0)$$

Θέμα 3ο Δίνονται τα $\vec{\alpha} = (k-2, \lambda-1)$ και $\vec{\beta} = (2, -3)$. Να βρείτε τα k, λ στις παρακάτω περιπτώσεις

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} = \vec{\beta} &\Leftrightarrow k-2 = 2 \text{ και } \lambda-1 = -3 \Rightarrow k=4 \text{ και } \lambda=-2 \\ \vec{\alpha} = -\vec{\beta} &\Leftrightarrow k-2 = -2 \text{ και } \lambda-1 = 3 \Rightarrow k=0 \text{ και } \lambda=4 \\ \vec{\alpha} = \vec{0} &\Leftrightarrow k-2 = 0 \text{ και } \lambda-1 = 0 \Rightarrow k=2 \text{ και } \lambda=1 \end{aligned}$$

- Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων**

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda \cdot \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

$$\lambda \cdot \vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

Θέμα 4ο Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, 4)$ και $\vec{\beta} = (2, -1)$.

A) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων :

$$3\vec{\alpha}, -2\vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}, 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$$

$$3\vec{\alpha} = 3 \cdot (-3, 4) = (-9, 12)$$

$$-2\vec{\beta} = -2 \cdot (2, -1) = (-4, 2)$$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (-3+2, 4+(-1)) = (-1, 3)$$

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-3-2, 4-(-1)) = (-5, 5)$$

$$3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = (-9, 12) + (-4, 2) = (-13, 14)$$

B) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-3, 5)$ ως γραμμικός συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Αναζητώ } k, \lambda \in \mathbb{R} \text{ τέτοιους ώστε } \vec{\gamma} = k\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} &\Leftrightarrow \\ (-3, 5) = k(-3, 4) + \lambda(2, -1) &\Leftrightarrow (-3, 5) = (-3k, 4k) + (2\lambda, -\lambda) &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(-3, 5) = \kappa(-3, 4) + \lambda(2, -1) \Leftrightarrow (-3, 5) = (-3\kappa, 4\kappa) + (2\lambda, -\lambda) \Leftrightarrow$$

$$(-3, 5) = (-3\kappa + 2\lambda, 4\kappa - \lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} -3\kappa + 2\lambda = -3 \\ 4\kappa - \lambda = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3\kappa + 2\lambda = -3 \\ 8\kappa - 2\lambda = 10 \quad (+) \end{cases}$$

$$5\kappa = 7 \Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{7}{5}}$$

$$\text{και } -3 \cdot \frac{7}{5} + 2\lambda = -3$$

$$-21 + 10\lambda = -15$$

$$10\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

- Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\underline{x_2}, \underline{y_2}) - (\underline{x_1}, \underline{y_1}) = (\underline{x_2 - x_1}, \underline{y_2 - y_1})$$

Θέμα 5ο Να βρείτε τις συν/νες του $\overrightarrow{AB}$ στις παρακάτω περιπτώσεις

ι) $A(2, 3)$ και $B(4, -1)$

ιι) $A(-2, 3)$ και $B(-5, 3)$

$$\overrightarrow{AB} = (\underline{4-2}, \underline{-1-3}) = (\underline{2}, \underline{-4})$$

$$\overrightarrow{AB} = (\underline{-5-(-2)}, \underline{3-3}) = (\underline{-3}, \underline{0})$$