

Θέμα 1°

Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 3)$ τότε :

α) να βρεθούν οι συν/νες των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}$, $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 4\vec{\gamma}$

β) να υπολογιστούν τα $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$, $|\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}|$, $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 4\vec{\gamma}|$

$$\alpha) \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = (2, 3) + 2(-1, 1) = (2, 3) + (-2, 2) = (0, 5)$$

$$|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$$

$$\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = (-1, 1) - 3(-2, 3) = (-1, 1) + (6, -9) = (5, -8)$$

$$|\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}| = \sqrt{5^2 + (-8)^2} = \sqrt{89}$$

$$\begin{aligned} 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 4\vec{\gamma} &= 2(2, 3) + 3(-1, 1) - 4(-2, 3) = \\ &= (4, 6) + (-3, 3) + (8, -12) = (9, -3) \end{aligned}$$

$$|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 4\vec{\gamma}| = \sqrt{9^2 + (-3)^2} = \sqrt{90}$$

Θέμα 2°

Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (4, 13)$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta} = (2, 3)$ και $\vec{\gamma} = (-1, 2)$

Αναζητώ $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\alpha} = k\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma} \Leftrightarrow$

$$(4, 13) = k(2, 3) + \lambda(-1, 2) \Leftrightarrow (4, 13) = (2k - \lambda, 3k + 2\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k - \lambda = 4 \\ 3k + 2\lambda = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ \lambda = 2 \end{cases} \quad \text{δηλαδή} \quad \vec{\alpha} = 3\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$$

Θέμα 3°

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (9, k)$, $\vec{\beta} = (k, 1)$. Να βρείτε τις τιμές του k στις παρακάτω περιπτώσεις : ι) $(3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \parallel \chi\chi'$ ii) $(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \parallel \psi\psi'$

$$i) 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = 3(9, k) + 2(k, 1) = (27 + 2k, 3k + 2)$$

$$3\vec{a} + 2\vec{b} \parallel x x' \Leftrightarrow 3\kappa + 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -\frac{2}{3}$$

$$ii) 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(9, \kappa) - 3(\kappa, 1) = (18 - 3\kappa, 2\kappa - 3)$$

$$2\vec{a} + 3\vec{b} \parallel xy' \Leftrightarrow 18 - 3\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 6$$

Θέμα 4°

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$ και $O(3, -1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του A ως προς το O .

Εστω $A'(x, y)$ το συμμετρικό του A ως προς το O .
Τότε O μέσο του AA' οπότε

$$x_0 = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$$

$$\text{και } y_0 = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$$

$$3 = \frac{-1 + x}{2}$$

$$-1 = \frac{2 + y}{2}$$

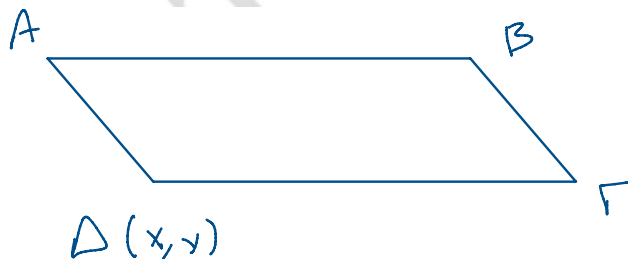
$$\boxed{x = 7}$$

$$\boxed{y = -4}$$

Συνεπώς $A'(7, -4)$

Θέμα 5°

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(3, -2)$, $B(5, 6)$, $\Gamma(-1, 3)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Δ και να εξετάσετε αν είναι ρόμβος.



$$AB\Gamma\Delta \text{ παρ/μω} \Leftrightarrow$$

$$\vec{AD} = \vec{BG} \Leftrightarrow$$

$$(x - 3, y + 2) = (-6, -3)$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = -6 \text{ και } y + 2 = -3$$

$$x = -3$$

$$y = -5$$

Άρα $\Delta(-3, -5)$

$$ΑΒΓΔ \text{ ρόμβος} \Leftrightarrow |\vec{AB}| = |\vec{AD}|$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(5-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{68}$$

$$|\vec{AD}| = \sqrt{(3+3)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{45}$$

Άρα $|\vec{AB}| \neq |\vec{AD}|$
δεν είναι ρόμβος

Θέμα 6°

Δίνονται τα σημεία $\Gamma(2,5)$ και $\Delta(-1,2)$. Να βρείτε :

i) τις συν/νες του $\vec{\Gamma\Delta}$ ii) το $|\vec{\Gamma\Delta}|$ iii) τις συν/νες του μέσου του $\Gamma\Delta$

$$i) \vec{\Gamma\Delta} = (-1-2, 2-5) = (-3, -3)$$

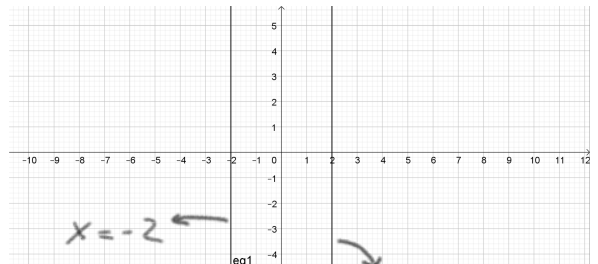
$$ii) |\vec{\Gamma\Delta}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$iii) \left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{5+2}{2} \right) \text{ δηλαδή } \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

A₁) Σχολιασμός σε 2.39

$$i) |x| = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

ούτ.ο $M(2, y) \text{ ή } M(-2, y)$
 $y \in \mathbb{R}$



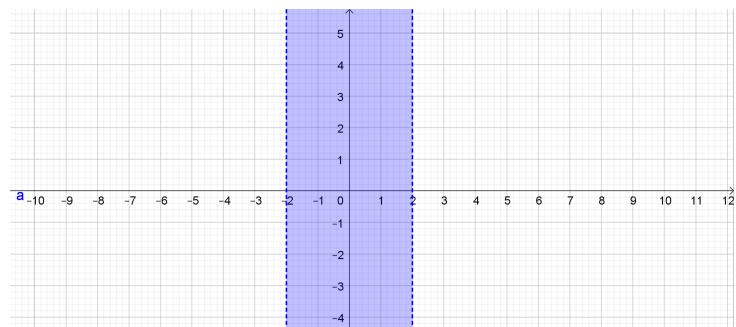
Το Μ κινείται οριζοντιωδώς $x=2$ ή $x=-2$

$$ii) |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$$

Το Μ κινείται με-τεξί

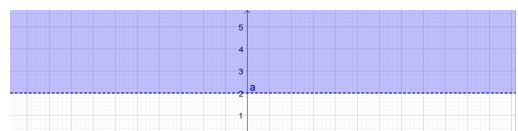
των οριζοντιωδών $x=2$ και $x=-2$

χωρίς να συμπίπτει των
οριζοντιωδών

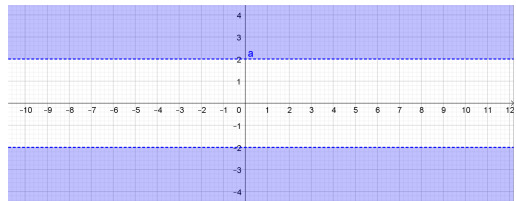


$$iii) |y| > 2 \Rightarrow y > 2 \text{ ή } y < -2$$

Το Μ κινείται ως ελ.η.α



Το Μ κινείται ως ετήσιο
 έξοδα πάνω από την $y=2$
 έξοδα κάτω από την $y=-2$



iv) $|x|=|y| \Rightarrow x=y$ ή $x=-y$

Το Μ κινείται είτε συνιστά
 $y=x$ (δixοζωμ) ως $x \hat{=} y$ ή
 συν $y=-x$ (δixοζωμ) ως $x \hat{=} y'$

