

Θεωρία

Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου.

Την ορίζουσα $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$, που έχει ως 1η τη γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}$ και ως 2η γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{b}$, τη λέμε **ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$** (με τη σειρά που δίνονται) και τη συμβολίζουμε με **$\det(\vec{a}, \vec{b})$** .

Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

$$\text{Δηλαδή } \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$$

Θέμα 1ο

A) Εξετάστε αν τα διανύσματα $\vec{a} = (\sqrt{3}, -1)$ και $\vec{b} = (3, -\sqrt{3})$ είναι παράλληλα

Λύση

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) - (-1) \cdot 3 = -3 + 3 = 0$$

Άρα $\vec{a} \parallel \vec{b}$

B) Εξετάστε αν τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$ και $\vec{b} = (-1, 2)$ είναι παράλληλα

Λύση

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 4 + 3 = 7 \neq 0$$

Άρα $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$

Θέμα 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (9, \kappa)$, $\vec{b} = (\kappa, 1)$ Να βρείτε τις τιμές του κ στις παρακάτω περιπτώσεις : ι) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ιι) $\vec{a} \nearrow \nearrow \vec{b}$ ιιι) $\vec{a} \nearrow \searrow \vec{b}$

Λύση

$$\text{ι) } \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 9 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 1 - \kappa^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 = 9 \Leftrightarrow \kappa = \pm 3$$

$$4) a // b \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} \quad | \quad k = 1 |$$

$$9 - 1 - k \cdot k = 0 \Leftrightarrow 9 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 3$$

για $k = 3$, $\vec{a} = (9, 3)$, $\vec{b} = (3, 1)$ οπότε $\vec{a} = 3\vec{b}$
και άρα $\vec{a} \uparrow \vec{b}$

για $k = -3$, $\vec{a} = (9, -3)$, $\vec{b} = (-3, 1)$ οπότε $\vec{a} = -3\vec{b}$
και άρα $\vec{a} \uparrow \vec{b}$

Θέμα 3ο

Εξετάστε αν τα σημεία $A(-6, 1)$, $B(-2, 3)$, $\Gamma(-10, -1)$ είναι συνευθειακά

Λύση

$$\overrightarrow{AB} = (-2+6, 3-1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{B\Gamma} = (-10+2, -1-3) = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = -16 - (-16) = -16 + 16 = 0 \Rightarrow \vec{AB} // \vec{B\Gamma} \Rightarrow$$

A, B, Γ συνευθειακά

Θέμα 4ο Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$.

Να δείξετε ότι τα A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου

Λύση

Α.ν.Σ.ν. A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά.

$$\vec{AB} = (-3, -1), \quad \vec{B\Gamma} = (4, -4)$$

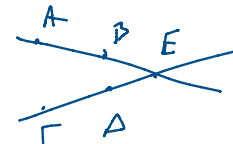
$$\det(\vec{AB}, \vec{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 12 - (-4) = 16 \neq 0 \Rightarrow \vec{AB} \not\parallel \vec{B\Gamma} \Rightarrow$$

A, B, Γ όχι συνευθειακά

Θέμα 5ο Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$, $B(6,2)$, $\Gamma(2,-3)$, $\Delta(6,-1)$. Αν E το σημείο τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου E .

Λύση Έστω $E(x,y)$.

A, B, E συνευθειακά οπότε $\vec{AB} \parallel \vec{BE} \Leftrightarrow \det(\vec{AB}, \vec{BE}) = 0$



$$\vec{AB} = (4, -1)$$

$$\vec{BE} = (x-6, y-2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ x-6 & y-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(y-2) + x-6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x+4y=14} \quad (1)$$

Γ, Δ, E συνευθειακά οπότε $\vec{\Gamma\Delta} \parallel \vec{\Delta E} \Leftrightarrow \det(\vec{\Gamma\Delta}, \vec{\Delta E}) = 0$

$$\vec{\Gamma\Delta} = (4, 2)$$

$$\vec{\Delta E} = (x-6, y+3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ x-6 & y+3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(y+3) - 2(x-6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x + 4y = -16 \Leftrightarrow \boxed{-x + 2y = -8} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 6y = 6 \Leftrightarrow \boxed{y = 1} \quad \text{και} \quad (1) \rightarrow \boxed{x = 10}$$

$$\text{Άρα } E(10, 1)$$