

Μάθημα 17ο - Συντελεστής διεύθυνσης

Θεωρία

Εστω $\vec{a} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\vec{OA} = \vec{a}$. Τη γωνία ϕ , που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ημιευθεία OA , την ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τον άξονα $x'x$.

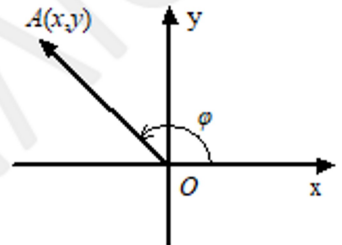
Είναι φανερό ότι $0 \leq \phi < 2\pi$ ή $0^\circ \leq \phi < 360^\circ$.

Για τη γωνία ϕ , όπως είναι γνωστό από την Τριγωνομετρία, αν το $\vec{a}$ δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, ισχύει $\epsilon\phi\phi = \frac{y}{x}$. Το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τεταγμένη του διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$, με $x \neq 0$, το λέμε συντελεστή διεύθυνσης του $\vec{a}$ και τον συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{a}}$ ή απλώς με λ . Επομένως:

$$\lambda = \frac{y}{x} = \epsilon\phi\phi$$

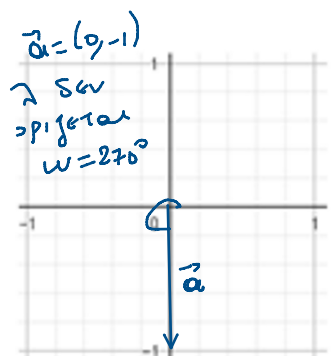
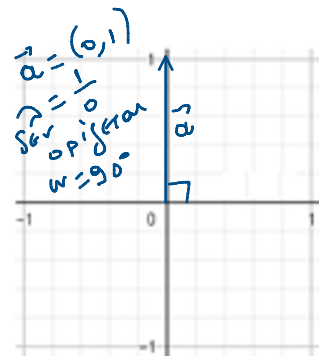
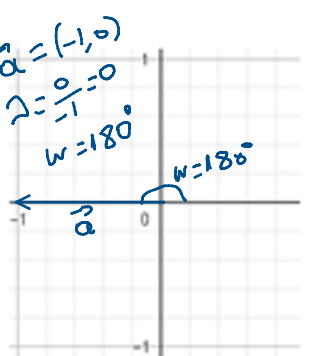
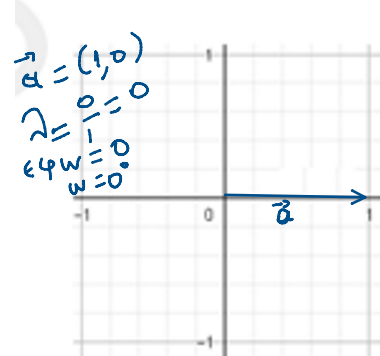
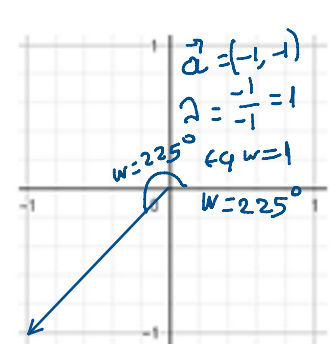
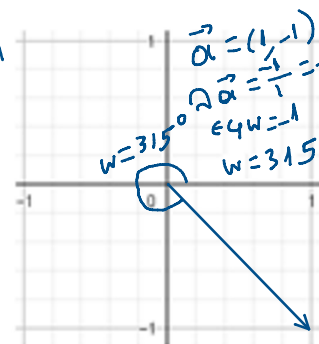
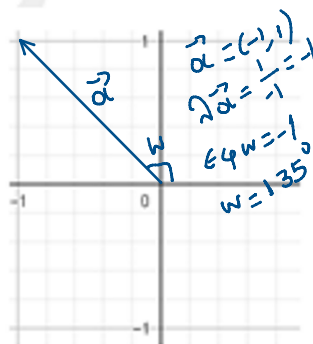
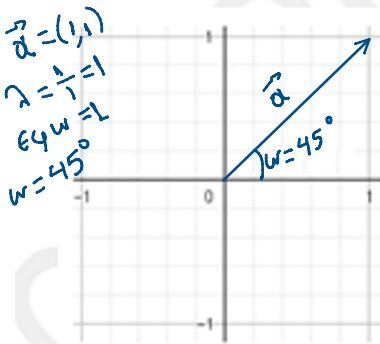
Είναι φανερό ότι

- Αν $y = 0$, δηλαδή αν $\vec{a} \parallel x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{a}$ είναι ο $\lambda = 0$.
- Αν $x = 0$, δηλαδή αν $\vec{a} \parallel y'y$, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{a}$.



Θέμα 1ο Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης και τη γωνία του διανύσματος $\vec{a}$ με τον xx' σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i) $\vec{a} = (1, 1)$ ii) $\vec{a} = (-1, 1)$ iii) $\vec{a} = (1, -1)$ iv) $\vec{a} = (-1, -1)$
 v) $\vec{a} = (1, 0)$ vi) $\vec{a} = (-1, 0)$ vii) $\vec{a} = (0, 1)$ viii) $\vec{a} = (0, -1)$



- Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ και

αν $x_1 \neq x_2$ τότε $\lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

αν $x_1 = x_2$ τότε $\lambda_{\overrightarrow{AB}}$ δεν ορίζεται

αν $y_1 = y_2$ και $x_1 \neq x_2$ τότε $\lambda_{\overrightarrow{AB}} = 0$

Θέμα 2ο Να βρείτε τις συν/νες του $\overrightarrow{AB}$, το συντελεστή διεύθυνσης του $\overrightarrow{AB}$ και τη γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{AB}$ με τον xx' όταν

$A(2,3)$ και $B(5,6)$ $\overrightarrow{AB} = (5-2, 6-3) = (3,3)$ $\lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{3}{3} = 1$ $\epsilon_{\phi w} = \perp$ $w = 45^\circ$ αφού το $\overrightarrow{AB}$ έχει θετικούς συντεταγμένους	$A(2,5)$ και $B(-1,2)$ $\overrightarrow{AB} = (-1-2, 2-5) = (-3,-3)$ $\lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{-3}{-3} = 1$ $\epsilon_{\phi w} = \perp$ $w = 225^\circ$ αφού το $\overrightarrow{AB}$ έχει αρνητικούς συντεταγμένους	$A(2,3)$ και $B(2,6)$ $\overrightarrow{AB} = (2-2, 6-3) = (0,3)$ $\lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{3}{0}$ δεν ορίζεται $\epsilon_{\phi w}$ δεν ορίζεται $w = 90^\circ$ αφού το $\overrightarrow{AB}$ έχει θετική τεταγμένη	$A(2,3)$ και $B(-5,3)$ $\overrightarrow{AB} = (-5-2, 3-3) = (-7,0)$ $\lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{0}{-7} = 0$ $\epsilon_{\phi w} = 0$ $w = 180^\circ$ αφού το $\overrightarrow{AB}$ έχει αρνητική τεταγμένη
---	--	--	---

- Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ $x_1, x_2 \neq 0$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

Επομένως, η συνθήκη παραλληλίας για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 διατυπώνεται ως εξής:

$$\boxed{\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2}$$

Θέμα 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ των οποίων οι συντελεστές διεύθυνσης είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + \lambda x + 4 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες είναι

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

$$\text{λ. λ.} \quad \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \implies \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}} \implies \wedge \text{ εξίσωση } x^2 + \lambda x + 4 = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

Αφού $\vec{a} \parallel \vec{b} \implies \lambda \vec{a} = \vec{b} \implies \wedge$ εξίσωση $x^2 + 2x + 4 = 0$
 έχει ρίζες $\implies$
 $\Delta = 0 \implies 2^2 - 16 = 0 \implies$
 $\boxed{\lambda = \pm 4}$

Θέμα 4°

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-2, -1)$, $\Gamma(x, 0)$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε τα σημεία A, B, Γ να είναι συνευθειακά και να προσδιορίσετε ποιο από τα A, B, Γ είναι μεταξύ των άλλων δύο.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η τιμή του x που βρήκατε στο α) ερώτημα είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\sqrt{(x+2)^2 + 1} + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = 3\sqrt{2}$

α) $\vec{AB} = (-3, -3)$, $\vec{A\Gamma} = (x-1, -2)$

A, B, Γ συνευθειακά $\iff \vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma} \iff \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = 0 \iff$

$\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ x-1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff 6 + 3(x-1) = 0 \iff 6 + 3x - 3 = 0 \iff \boxed{x = -1}$

$\vec{AB} = (-3, -3)$, $\vec{A\Gamma} = (-2, -2)$, $\vec{B\Gamma} = (1, 1)$

$\vec{AB} = -3\vec{B\Gamma} \implies \vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{B\Gamma}$ οπότε
 $\vec{A\Gamma} = -2\vec{B\Gamma} \implies \vec{A\Gamma} \uparrow \downarrow \vec{B\Gamma}$



β) $\sqrt{(x+2)^2 + 1} = |\vec{B\Gamma}|$, $\sqrt{(x-1)^2 + 4} = |\vec{A\Gamma}|$, $|\vec{AB}| = 3\sqrt{2}$

οπότε $\sqrt{(x+2)^2 + 1} + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = 3\sqrt{2} \iff$

$|\vec{B\Gamma}| + |\vec{A\Gamma}| = |\vec{AB}| \iff$

$|\vec{B\Gamma}| + |\vec{A\Gamma}| = |\vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma B}| \iff \vec{A\Gamma} \uparrow \vec{\Gamma B} \iff$

A, Γ, B συνευθειακά $\iff$ α)