

Μάθημα 18ο - Εσωτερικό γινόμενο

- Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και συμβολίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, τον πραγματικό αριθμό $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \phi$. Δηλαδή

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \phi$$

- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \phi$$

Θέμα 1° Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\phi = \frac{2\pi}{3}$ να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Λύση $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{-1}{2} = -3$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0 &\Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) < 90^\circ \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0 &\Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) > 90^\circ \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 &\Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \end{aligned}$$

Θέμα 2° Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots 0 \dots$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \dots 0 \dots$$

$$\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos 180^\circ = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$$

$$\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$$

$$\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{\alpha}|^2$$

$$\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1^2 = 1$$

$$\vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1^2 = 1$$

Θέμα 3° Συμπληρώστε τα ☐ δίπλα στις παρακάτω παραστάσεις με Δ αν παριστάνουν διάνυσμα και με Α αν παριστάνουν αριθμό

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \quad \boxed{A}, \quad (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \quad \boxed{\Delta}, \quad (\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \quad \boxed{A}, \quad |\vec{\alpha}| \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \quad \boxed{A}, \quad \vec{\alpha}^2 \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \quad \boxed{A}$$

$$\frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} \quad \boxed{\Delta}, \quad \vec{\alpha} \cdot (|\vec{\beta}| \cdot \vec{\gamma}) \quad \boxed{A}, \quad \alpha \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \quad \boxed{A}, \quad (\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \quad \boxed{\Delta},$$

Θέμα 4° Συμπληρώστε τα ☐ δίπλα στις παρακάτω παραστάσεις με Μ αν εκφράζουν μέτρο και με Α αν εκφράζουν απόλυτο

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \quad \boxed{A}, \quad |(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}| \quad \boxed{M}, \quad |(\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})| \quad \boxed{A}, \quad ||\vec{\alpha}| \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})| \quad \boxed{A}, \quad |\vec{\alpha}^2 \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})| \quad \boxed{A}$$

Θέμα 5° Συμπληρώστε τα $\square$ δίπλα στις παρακάτω παραστάσεις με Δ αν παριστάνουν διάνυσμα, με Α αν παριστάνουν αριθμό και με Χ αν δεν έχουν νόημα και να αναφέρεται υπό ποιες προϋποθέσεις ορίζονται.

$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} \square$, $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\gamma}}{\vec{a} \cdot \vec{\beta}} \square$, $\frac{(\vec{a} \cdot \vec{\delta}) \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{\vec{a} \cdot \vec{\delta}} \square$, $\frac{\vec{a}^2 \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}} \square$, $\frac{\vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{\beta}} \square$ δεν έχει νόημα $\frac{\vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \neq \frac{1}{b}$
 $\frac{\vec{a}}{|\vec{\beta}|} \square$, $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}} \square$, $\frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\delta}}{\vec{a} \cdot \vec{\delta}} \square$, $\frac{\vec{a}^2 \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{|\vec{a}| \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})} \square$, $\frac{\vec{a}^2}{\vec{a} \cdot \vec{\beta}} \square$ δεν έχει νόημα $\frac{\vec{a}^2}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \neq \frac{\vec{a}}{b}$
 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\delta}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \neq \frac{\vec{\delta}}{b}$ $\rightarrow$ δεν έχει νόημα
 $\frac{(\vec{a} \cdot \vec{\delta})(\vec{b} \cdot \vec{\delta})}{\vec{a} \cdot \vec{\delta}} = \vec{b} \cdot \vec{\delta}$, $\frac{\vec{a}^2(\vec{b} \cdot \vec{\delta})}{\vec{b} \cdot \vec{\delta}} = \vec{a}^2$
 $\frac{(\vec{b} \cdot \vec{\delta}) \cdot \vec{\delta}}{\vec{a} \cdot \vec{\delta}} \neq \frac{\vec{b} \cdot \vec{\delta}}{\vec{a}}$ $\rightarrow$ δεν έχει νόημα
 $\frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{\delta})}{|\vec{a}|(\vec{b} \cdot \vec{\delta})} = \frac{\vec{a}^2}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|} = |\vec{a}|$

• Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$. Είναι $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Θέμα 6° Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (-4, 3)$ Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Λύση $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 3 = -12 - 6 = -18$

Θέμα 7° Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (9, \kappa)$, $\vec{b} = (\kappa, 1)$ Να βρείτε την τιμή του κ ώστε $\vec{a} \perp \vec{b}$

Λύση $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 9\kappa + \kappa = 0 \Leftrightarrow 10\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου,

τότε $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Θέμα 8° Αν $\vec{a} = (1, -2)$ και $\vec{b} = (-3, 1)$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{b})$

Λύση $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2}}$ οπότε $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$

$= \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-5}{\sqrt{50}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$