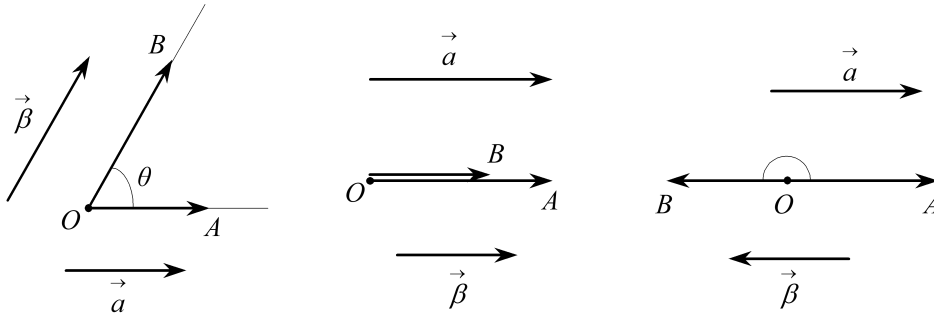


Μάθημα 2ο - Γωνία διανυσμάτων

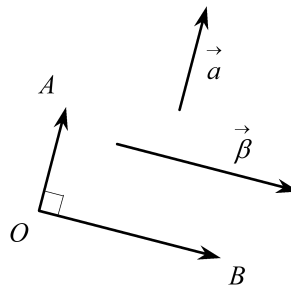
• Γωνία δύο Διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA}=\vec{a}$ και $\vec{OB}=\vec{b}$.



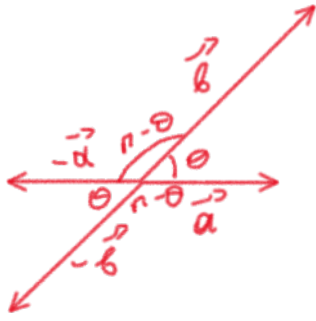
Την κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB , την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$** και τη συμβολίζουμε με $(\vec{a}, \vec{b})$ ή $(\vec{b}, \vec{a})$ ή ακόμα, αν δεν προκαλείται σύγχυση, με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα θ . Εύκολα αποδεικνύεται ότι η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου O . Είναι φανερό επίσης ότι $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ή σε ακτίνια $0 \leq \theta \leq \pi$ και ειδικότερα:

- $\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \cos \theta = 1$
- $\theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \cos \theta = -1$
- $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ή } \theta = \pi \Leftrightarrow \cos \theta = \pm 1$
- Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{a} \perp \vec{b}$.



- Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0 \leq \theta \leq \pi$. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα, $\vec{0}$, είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.
- Αν $(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$ τότε $(-\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \theta$, $(\vec{a}, -\vec{b}) = \pi - \theta$ και $(-\vec{a}, -\vec{b}) = \theta$
- Για να βρούμε τη γωνία δύο διανυσμάτων **πρέπει να έχουν την ίδια αρχή**. Αν δεν την έχουν, τότε με παράλληλη μεταφορά τα κάνουμε να έχουν και κατόπιν βρίσκουμε τη γωνία τους.

την έχουν, τότε με παράλληλη μεταφορά τα κάνουμε να έχουν και κατόπιν βρίσκουμε τη γωνία τους.



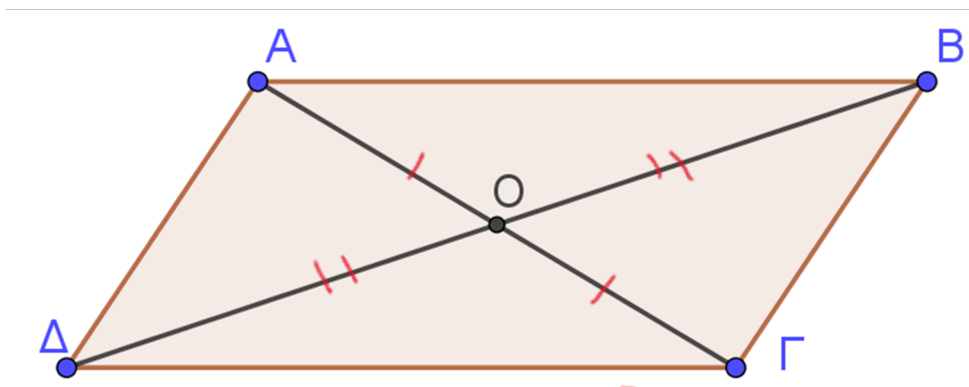
Θέμα 1ο Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

1. Αν $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, τότε $\vec{a} = \vec{b}$. Λ
2. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα. Σ
3. Αν $\vec{a} = -\vec{b}$, τότε $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a}) = 2\pi$. Σ
4. Τα αντίρροπα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση. Σ
5. Δύο διανύσματα που έχουν ίδια κατεύθυνση λέγονται ομόρροπα. Σ
6. Αν $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$ τότε $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LN}$. Σ
7. Για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ είναι $|\vec{a}| > 0$. Λ $|\vec{a}| \geq 0$
8. Αν $|\vec{a}| > 0$ τότε $\vec{a} \neq \vec{0}$. Σ
9. $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0$. Σ
10. Για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ είναι $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$. Σ

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \quad \Sigma$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \quad \Lambda$$

Θέμα 2ο Με βάση το παρακάτω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

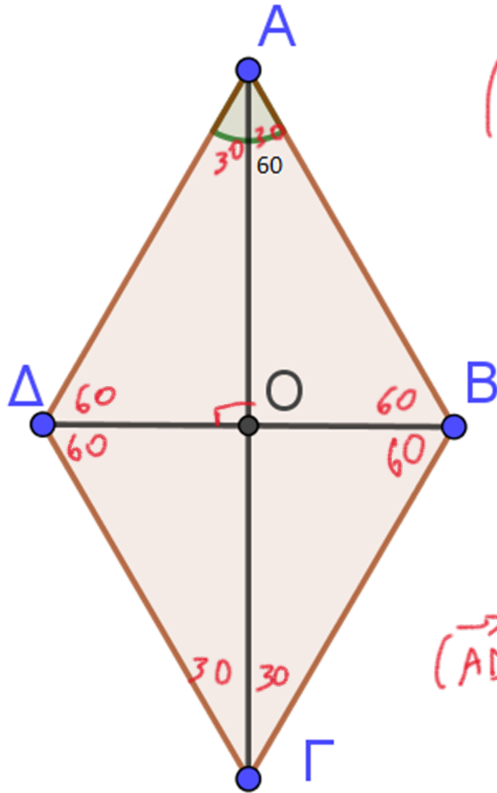


1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ Λ $\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta} = \vec{\Delta\Gamma}$
2. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$ Σ
3. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\Gamma}$ Λ $\vec{AO} = \vec{O\Gamma}$
4. $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{O\Gamma}|$ Σ
5. $\overrightarrow{AB} \nearrow \swarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ Σ
6. $\overrightarrow{\Delta O} = \overrightarrow{O\Gamma}$ Λ
7. $|\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Delta}|$ Λ

Θέμα 3ο

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τις παρακάτω γωνίες

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta\Gamma})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$, $(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma B})$, $(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{B\Delta})$, $(\overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{\Delta\Gamma})$, $(\overrightarrow{\Delta\Delta}, \overrightarrow{\Delta B})$



$$(\vec{AB}, \vec{\Delta\Gamma}) = 0^\circ \text{ αφού } \vec{AB} \parallel \vec{\Delta\Gamma}$$

$$(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = 30^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{6}$$

$$(\vec{A\Gamma}, \vec{\Gamma B}) = 180^\circ - (\vec{\Gamma A}, \vec{\Gamma B}) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$(\vec{A\Gamma}, \vec{B\Delta}) = 90^\circ$$

$$(\vec{\Gamma A}, \vec{\Delta\Gamma}) = 180^\circ - (\vec{\Gamma A}, \vec{\Gamma\Delta}) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$(\vec{A\Delta}, \vec{\Delta B}) = 180^\circ - (\vec{\Delta A}, \vec{\Delta B}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Θέμα 4ο

Αν για τα σημεία του επιπέδου A, B, Γ, Δ, E ισχύει ότι $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{\Gamma E}$ να δείξετε ότι το σημείο A είναι το μέσο του ΔE .

$$A.v.S.o \quad \vec{\Delta A} = \vec{A E}$$

$$\vec{B\Delta} = \vec{\Gamma A} \Rightarrow \vec{B\Gamma} = \vec{\Delta A} \quad (1)$$

$$\vec{B\Delta} = \vec{\Gamma E} \Rightarrow \vec{B\Gamma} = \vec{A E} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \vec{\Delta A} = \vec{A E} \Rightarrow A \text{ μέσο } \Delta E$$