

2. Αν $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(4,2)$ και $\vec{w}=(6,0)$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $\vec{u} \cdot (7\vec{v} + \vec{w})$, $|\vec{u}|(\vec{v} \cdot \vec{w})$, $|(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}|$ και $(|\vec{u}| \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

$$\text{i)} \vec{u} \cdot (7\vec{v} + \vec{w}) = (1,2) \cdot (7(4,2) + (6,0)) = (1,2) \cdot ((28,14) + (6,0)) = \\ = (1,2) \cdot (34,14) = 1 \cdot 34 + 2 \cdot 14 = 34 + 28 = 62$$

2ος τρόπος / $\vec{u} \cdot (7\vec{v} + \vec{w}) = 7\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = 7(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2) + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = \\ = 7 \cdot 8 + 6 = 62$

$$\text{ii)} |\vec{u}| \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot (4 \cdot 6 + 2 \cdot 0) = 2\sqrt{5} \cdot 24 = 48\sqrt{5}$$

$$\text{iii)} |(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2) \cdot \vec{w}| = |8 \cdot \vec{w}| = 8 \cdot |\vec{w}| = 8 \cdot \sqrt{6^2 + 0^2} = 8 \cdot 6 = 48$$

$$\text{iv)} (|\vec{u}| \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = 24\sqrt{5}$$

(2ος τρόπος)

11. Δίνονται τα σημεία $A(3,-2)$, $B(6,-4)$, $\Gamma(1,5)$ και $\Delta(-1,2)$. Να υπολογίσετε

(i) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$

(ii) Τι συμπεραίνετε για τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$;

$$\text{i)} \vec{AB} = (6-3, -4-(-2)) = (3, -2) \quad \vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta} = 3(-2) + (-2)(-3) = -6 + 6 = 0 \\ \vec{\Gamma\Delta} = (-1-1, 2-5) = (-2, -3) \quad \text{ii)} \text{ οπότε } \vec{AB} \perp \vec{\Gamma\Delta}$$

5. Αν $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τον $k \in \mathbf{R}$, ώστε τα διανύσματα

$$\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} \text{ και } \vec{v} = k\vec{a} + 2\vec{b} \text{ να είναι κάθετα.}$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (k\vec{a} + 2\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \\ 3k\vec{a} \cdot \vec{a} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - k\vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 12k + 18 - 3k - 18 = 0 \Leftrightarrow 9k = 0 \Leftrightarrow \boxed{k=0}$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 2^2 = 4, \quad \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 3^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$$