

Μάθημα 21ο - Λύση εργασίας

Λέμα 1° Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

β) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 135^\circ$

α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$

β) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin 135^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} \cdot (\sin(180^\circ - 45^\circ)) = 2\sqrt{36} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2, 1)$ και $\vec{AG} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{BG} = (1, -2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} \perp \vec{BG}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|\vec{AB}| = |\vec{BG}|$.

α) $\vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = (3, -1) - (2, 1) = (1, -2)$

β) $\vec{AB} \cdot \vec{BG} = (2, 1) \cdot (1, -2) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BG}$

γ) $\left. \begin{array}{l} |\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ |\vec{BG}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{BG}|$

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με $A(-2, 5), B(7, 8), \Gamma(1, -4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $\widehat{BAG}$.

α) $\vec{AB} = (7 - (-2), 8 - 5) = (9, 3)$
 $\vec{AG} = (1 - (-2), -4 - 5) = (3, -9)$

β) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 9 \cdot 3 + 3 \cdot (-9) = 27 - 27 = 0$

γ) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AG} \Rightarrow \widehat{BAG} = 90^\circ$

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$.

$$\alpha) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$$\beta) \vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 3^2 = 9$$

$$\vec{\beta}^2 = |\vec{\beta}|^2 = 16$$

$$\delta) (3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}^2 - 9\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}^2 = 3 \cdot 9 - 9 \cdot 6 - 6 + 3 \cdot 16 = 15$$

Θέμα 5ο

ίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ β) $\vec{a}^2 + \vec{b}^2$ γ) $(\vec{a} + \vec{b})^2$ δ) $|\vec{a} + \vec{b}|$ ε) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 5\vec{b})$

$$\alpha) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\beta) \vec{a}^2 + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 2 + (2\sqrt{2})^2 = 2 + 8 = 10$$

$$\gamma) (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 2 + 4 + 8 = 14$$

$$\delta) |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = 14 \quad \text{οπότε } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{14}$$

$$\epsilon) (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 5\vec{b}) = 8\vec{a}^2 - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{a} - 15\vec{b}^2 = 8 \cdot 2 + 4 - 15 \cdot 8 = 16 - 104 = -88$$

Θέμα 6ο Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα είναι κάθετο με ένα διάνυσμα της στήλης Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β κάθετο διάνυσμα
1. $\vec{\alpha} = (2\kappa, 1)$	Α. $\vec{e} = (0, \kappa)$
2. $\vec{\beta} = (\kappa, -1)$	Β. $\vec{u} = (\frac{1}{\kappa}, 1)$
3. $\vec{\gamma} = (\kappa + 1, \kappa)$	Γ. $\vec{v} = (1, \frac{1}{\kappa})$
4. $\vec{\delta} = (0, \frac{1}{\kappa})$	Δ. $\vec{w} = (1, -2\kappa)$
	Ε. $\vec{r} = (\kappa, -\kappa - 1)$

Γενικά

$$\vec{a} = (\kappa, 2)$$

$$\vec{\beta} = (-2, \kappa)$$

$$\text{για } \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -\kappa^2 + 2\kappa = 0 \quad \text{οπότε } \vec{a} \perp \vec{\beta}$$

$$\text{Ομω } \vec{\gamma} = 4\vec{\beta} \quad \text{για } \vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$$

4. $\vec{s} = (0, \frac{1}{\kappa})$

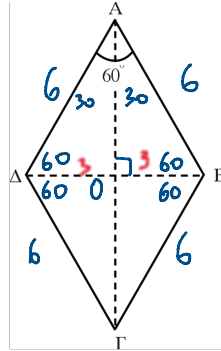
$\Delta. \vec{w} = (1, -2\kappa)$
 $E. \vec{r} = (\kappa, -\kappa-1)$
 $Z. \vec{m} = (\kappa^2, 0)$

Ομω $\vec{s} = \mu \vec{d}$ τότε $\vec{s} \perp \vec{a}$
 Τελικά τα διανύσματα
 που είναι κάθετα στο
 $\vec{a} = (\kappa, 2)$ είναι της μορφής
 $\mu \cdot (-2, \kappa) = (-2\mu, \mu\kappa)$

1 $\rightarrow D$, 2 $\rightarrow B$
 3 $\rightarrow E$, 4 $\rightarrow Z$

Θέμα 7°

Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος με γωνία $A = 60^\circ$ και πλευρά 6 cm. Αν O το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης A του πίνακα με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης B .



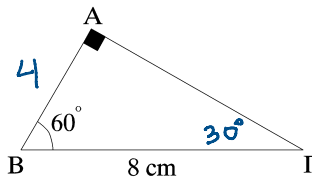
στήλη A	στήλη B
1. $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$	A. 18
2. $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$	B. 36
3. $\vec{AB} \cdot \vec{GD}$	Γ. 0
4. $\vec{AD} \cdot \vec{GD}$	Δ. -36
	E. -18
	Z. $18\sqrt{3}$

1 $\rightarrow \Gamma$, 2 $\rightarrow A$
 3 $\rightarrow \Delta$, 4 $\rightarrow E$

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ αφού $\vec{OA} \perp \vec{OB}$
 $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18$
 $\vec{AB} \cdot \vec{GD} = 6 \cdot 6 \cdot \sin 180^\circ = -36$
 $\vec{AD} \cdot \vec{GD} = 6 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18$
 $(\vec{AD}, \vec{GD}) = (\vec{DA}, \vec{DG})$

Θέμα 8°

σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A έχει γωνία $B = 60^\circ$. Αν η υποτείνουσά του είναι 8 cm. Να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης A του πίνακα με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης B .



στήλη A	στήλη B
1. $\vec{AB} \cdot \vec{GA}$	A. -16
2. $\vec{BA} \cdot \vec{BG}$	B. $16\sqrt{3}$
3. $\vec{BA} \cdot \vec{GB}$	Γ. 16
	Δ. 0
	E. $-16\sqrt{3}$

1 $\rightarrow \Delta$, 2 $\rightarrow \Gamma$, 3 $\rightarrow A$

$\hat{A} = 90^\circ$
 $\hat{\Gamma} = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{BG}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$\vec{AB} \cdot \vec{GA} = 0$ αφού $\vec{AB} \perp \vec{GA}$
 $\vec{BA} \cdot \vec{BG} = 4 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16$
 $\vec{BA} \cdot \vec{GB} = \vec{BA} \cdot (-\vec{BG}) = -\vec{BA} \cdot \vec{BG} = -16$

8. Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \sin(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$$

$$\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) \xLeftrightarrow[\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}] \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$$