

1. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=3$ και $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

$$\begin{aligned} 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} &\Rightarrow 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma} \Rightarrow (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (-\vec{\gamma})^2 \Rightarrow \\ 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 &= \vec{\gamma}^2 \Rightarrow 4\cdot 2^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 1^2 = 3^2 \Rightarrow \\ 4\vec{\alpha}\vec{\beta} &= -8 \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -2} \end{aligned}$$

$$\cos(\hat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \frac{-2}{2\cdot 1} = -1 \Rightarrow (\hat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \pi \Rightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \text{ και } \boxed{\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}}$$

$$\begin{aligned} 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} &\Rightarrow \vec{\beta} + \vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} \Rightarrow (\vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = (-2\vec{\alpha})^2 \Rightarrow \\ \vec{\beta}^2 + 2\vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}^2 &= 4\vec{\alpha}^2 \Rightarrow 1 + 2\vec{\beta}\vec{\gamma} + 9 = 16 \Rightarrow \boxed{\vec{\beta}\vec{\gamma} = 3} \end{aligned}$$

$$\cos(\hat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} = \frac{3}{1\cdot 3} = 1 \Rightarrow (\hat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = 0 \Rightarrow \vec{\beta} \uparrow \vec{\gamma} \text{ και αφού } |\vec{\gamma}| = 3|\vec{\beta}| \text{ είναι } \boxed{\vec{\gamma} = 3\vec{\beta}}$$

2ος τρόπος

$$\begin{aligned} 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} &\Rightarrow (2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})\vec{\beta} = \vec{0}\cdot\vec{\beta} \Rightarrow \boxed{\vec{\beta}\vec{\gamma} = 3} \\ 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 + \vec{\beta}\vec{\gamma} &= 0 \Rightarrow 2\cdot(-2) + 1 + \vec{\beta}\vec{\gamma} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\beta}\vec{\gamma} = 3} \end{aligned}$$

3ος τρόπος

$$2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow 2\cdot(-2\vec{\beta}) + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow -4\vec{\beta} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = 3\vec{\beta}}$$

$$\begin{aligned} \text{Τέλος } \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} &= \vec{\gamma}(-2\vec{\beta}) = -2\vec{\beta}\vec{\gamma} = -6 \\ \text{οπότε } \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} &= -2 + 3 - 6 = -5 \end{aligned}$$

2. Να αποδείξετε ότι:

(i) $|\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$

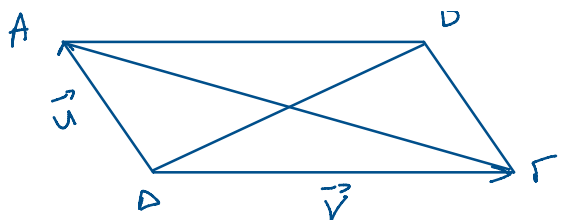
$$\begin{aligned} \text{1ο μέθοδος } |\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})^2 + (\vec{u}-\vec{v})^2 = \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2 + \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2 = 2\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

Γεωμετρική ερμηνεία



Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με

$$\vec{\Delta A} = \vec{u} \quad \vec{\Delta \Gamma} = \vec{v}$$



Έστω $ABCD$ παραλληλόγραμμο

$$\vec{DA} = \vec{u}, \quad \vec{DB} = \vec{v}$$

$$\text{τότε } \vec{AB} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{AC} = \vec{u} - \vec{v}$$

οπότε

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2 \Rightarrow$$

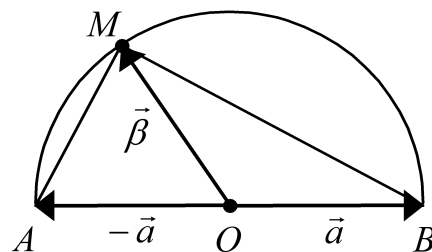
$$AB^2 + AC^2 = 2 \cdot AD^2 + 2 \cdot DB^2 \quad \text{δηλαδή}$$

σε κάθε παραλληλόγραμμο το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του.

1. Σε ημικύκλιο με διάμετρο AB και κέντρο O παίρνουμε σημείο M .

(i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{MA}$ και $\vec{MB}$ ως συνάρτηση των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

(ii) Να βρείτε το γινόμενο $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$. Τι συμπεραίνετε για τη γωνία των διανυσμάτων



$\vec{MA}$ και $\vec{MB}$; Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχτεί;

$$\begin{aligned} \vec{MA} &= \vec{OA} - \vec{OM} = -\vec{a} - \vec{\beta} \\ \vec{MB} &= \vec{OB} - \vec{OM} = \vec{a} - \vec{\beta} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (-\vec{a} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - \vec{\beta}) = \\ &= -\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \vec{a} + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = \\ &= |\vec{\beta}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0 \quad \text{αφού } |\vec{a}| = |\vec{\beta}| \text{ ακτίνας} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Άρα } \vec{MA} \perp \vec{MB} \Rightarrow \hat{AMB} = 90^\circ$$

Κάθε εγγεγραμμένη που δίνει ημικύκλιο είναι ορθή.