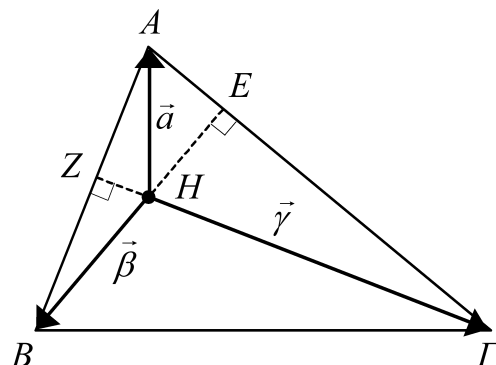


8. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα δύο ύψη του BE και ΓZ τέμνονται στο H . Έστω $\vec{HA} = \vec{a}$, $\vec{HB} = \vec{\beta}$ και $\vec{H\Gamma} = \vec{\gamma}$.



- (i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.
 (ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} \cdot \vec{a} = \vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta}$.

- (iii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\vec{\gamma} \cdot \vec{a} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$.

Με τη βοήθεια της ισότητας αυτής να δείξετε ότι $AH \perp B\Gamma$. Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχτεί;

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{HB} - \vec{HA} = \vec{\beta} - \vec{a} \\ \vec{A\Gamma} &= \vec{H\Gamma} - \vec{HA} = \vec{\gamma} - \vec{a} \\ \vec{B\Gamma} &= \vec{H\Gamma} - \vec{HB} = \vec{\gamma} - \vec{\beta} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{H\Gamma} &\perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{H\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow \vec{\gamma} \cdot (\vec{\beta} - \vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} - \vec{\gamma} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma} \cdot \vec{a}} \quad (1) \\ \vec{HB} &\perp \vec{A\Gamma} \Rightarrow \vec{HB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0 \Rightarrow \vec{\beta} \cdot (\vec{\gamma} - \vec{a}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}} \quad (2) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} (1), (2) &\Rightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{a} = \vec{\beta} \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{a} - \vec{\beta} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{\gamma} - \vec{\beta}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp (\vec{\gamma} - \vec{\beta}) \Rightarrow \vec{HA} \perp \vec{B\Gamma} \Rightarrow AH \text{ ύψος} \end{aligned}$$

Αποδείχθηκε η ιδιότητα του ορθόκεντρου H

Θέμα 3ο

Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{a} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{a} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ να βρεθεί το $|2\vec{a} - \vec{\beta}|$.

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{a} - 3\vec{\beta}) &\Rightarrow (\vec{a} + 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{\beta}) = 0 \Rightarrow \vec{a}^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = 0 \xrightarrow{(1)} |\vec{a}|^2 - 0 + 0 - 6|\vec{\beta}|^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6 = 6|\vec{\beta}|^2 \Rightarrow |\vec{\beta}|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|\vec{\beta}| = 1} \end{aligned}$$

$$\therefore |2\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 4 \cdot 6 - 0 + 1 = 25 \Rightarrow |2\vec{a} - \vec{\beta}| = 5$$

$$\vec{a}^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b}^2 = 6 \quad \dots$$

$$\sqrt{6}^2 = 6|\vec{b}|^2 \Rightarrow 6 = 6|\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{b}|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|\vec{b}| = 1}$$

$$\cdot |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 4\sqrt{6}^2 - 0 + 1^2 = 25$$

οπότε $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$

Θέμα 4^ο

Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{6}$ να υπολογίσετε το $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

$$\cdot |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{6} \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = \sqrt{6}^2 \Rightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 6 \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 6 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 6 \Rightarrow$$

$$1^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2^2 = 6 \Rightarrow 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1 \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\cdot |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 = 4$$

οπότε $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$

Θέμα 6^ο

Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 3$, $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να υπολογίσετε την παράσταση $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

$$\cdot 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = -\vec{\gamma} \Rightarrow (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 = (-\vec{\gamma})^2 \Rightarrow$$

$$4\vec{\alpha}^2 - 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = \vec{\gamma}^2 \Rightarrow 4 \cdot 1^2 - 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9 \cdot 2^2 = 3^2 \Rightarrow$$

$$4 - 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 36 = 9 \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{31}{12}}$$

$$\cdot 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \cdot \vec{\beta} = \vec{0} \cdot \vec{\beta} \Rightarrow$$

$$2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{31}{12} - 3 \cdot 2^2 + \vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \frac{41}{6}}$$

$$\cdot 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \cdot \vec{\alpha} = \vec{0} \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 23}$$

$$\cdot \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow (2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0 \quad \cdot$$

$$2\vec{a}^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot \frac{31}{12} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{23}{4}}$$

$$T \in \mathbb{N}_{1 \times 2} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{31}{12} + \frac{41}{6} + \frac{23}{4} = \dots$$