

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής C , όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C , και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

Θέμα 1° Ποια από τα παρακάτω σημεία $(1,1)$, $(-2,4)$, $(-3,-9)$, $(0,0)$, $(4,2)$, $(\sqrt{3},3)$ ανήκουν στην γραμμή με εξίσωση $y = x^2$

για $x=1, y=1$ έχω $1=1^2$ που ισχύει οπότε το $(1,1) \in C$

για $x=-2, y=4$ έχω $4=(-2)^2$ που ισχύει οπότε $(-2,4) \in C$

για $x=-3, y=-9$ έχω $-9=(-3)^2$ δεν ισχύει οπότε $(-3,-9) \notin C$

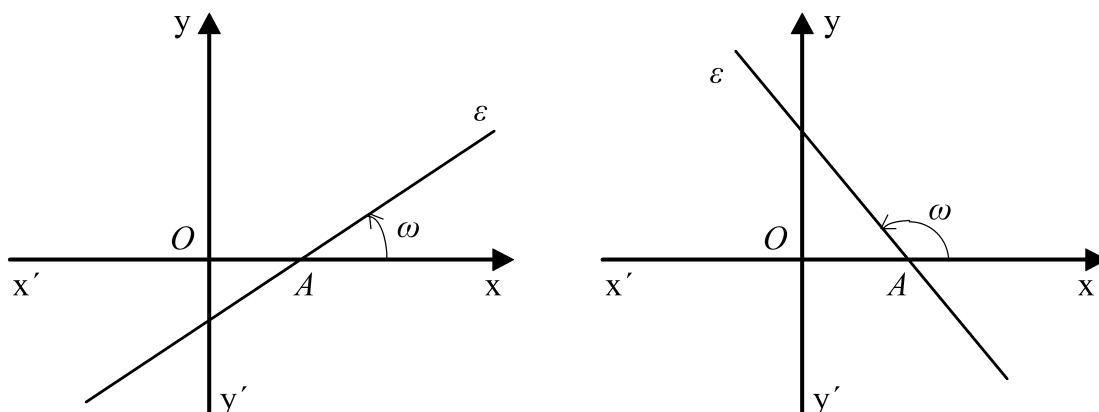
για $x=0, y=0$ έχω $0=0^2$ που ισχύει οπότε $(0,0) \in C$

για $x=4, y=2$ έχω $2=4^2$ δεν ισχύει οπότε $(4,2) \notin C$

για $x=\sqrt{3}, y=3$ έχω $3=(\sqrt{3})^2$ που ισχύει οπότε $(\sqrt{3},3) \in C$

Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A .



- Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$** .
- Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε $\omega = 0^\circ$
- Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ ή σε ακτίνια $0 \leq \omega < \pi$.
- Ως **συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.
- Προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός, αν η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία και αρνητικός, αν είναι αμβλεία
- Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ο συντελεστής διεύθυνσης είναι 0.
- Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι 90° και ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται.

Θέμα 2°

Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε , που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$

γωνία: α) $\omega = \frac{\pi}{3}$

β) $\omega = \frac{2\pi}{3}$

γ) $\omega = 0$

δ) $\omega = \frac{\pi}{2}$

Λύση : α) $\lambda = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

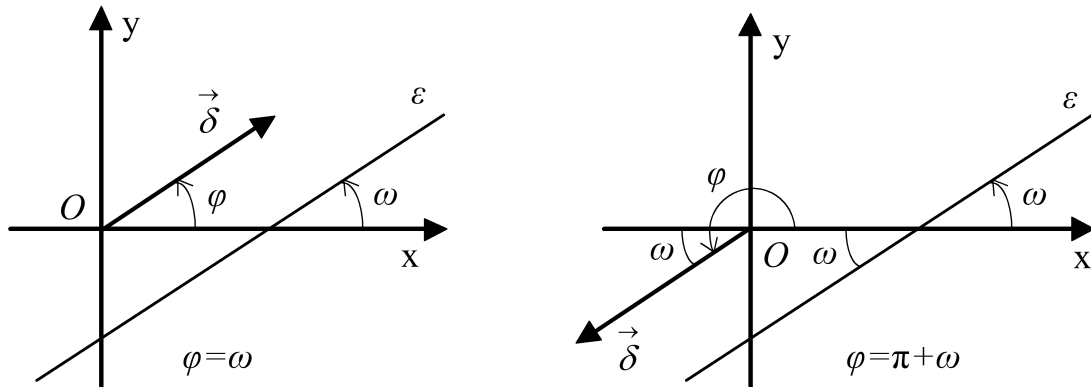
β) $\lambda = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

γ) $\lambda = \tan 0 = 0$

δ) $\lambda = \tan \frac{\pi}{2}$ δεν ορίζεται

- Έστω τώρα ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο σε μια ευθεία ε . Αν φ και ω είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το $\vec{\delta}$ και η ε με τον $x'x$ αντιστοίχως, τότε θα ισχύει $\varphi = \omega$ ή $\varphi = \pi + \omega$ και επομένως $\varepsilon\varphi = \varepsilon\phi\omega$. Άρα:

“Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης”.



Αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες δύο σημείων μιας μη κατακόρυφης ευθείας ε , δηλαδή μιας ευθείας που δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, τότε μπορούμε να βρούμε και το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής. Πράγματι, αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία της ευθείας ε , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, δηλαδή ίσος με $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Επομένως:

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Για παράδειγμα, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(-1, 4)$ είναι $\lambda = \frac{4 - (-2)}{-1 - 1} = -3$.

Εξίσωση Ευθείας

- Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι η $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$
- Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι η $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ή $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$
- Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(x_0, y_1)$ και $B(x_0, y_2)$ είναι η $x = x_0$
- Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι η $y = \lambda x + \beta$
- Η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $(0,0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι η $y = \lambda x$
- Η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στον yy' και διέρχεται από $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $x = x_0$
- Η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στον xx' και διέρχεται από $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $y = y_0$
- Ο xx' έχει εξίσωση $y=0$
- Ο yy' έχει εξίσωση $x=0$
- Η διχοτόμος της γωνίας $\chi O \psi$ έχει εξίσωση $y = x$
- Η διχοτόμος της γωνίας $\chi' O \psi$ έχει εξίσωση $y = -x$

Θέμα 3^ο Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ τη γωνία ω που σχηματίζει με τον

άξονα $x'x$ και την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία A και B

σε κάθε περίπτωση.

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \epsilon_{\gamma\omega}$$

α) $A(-6, -2)$ $B(3, 7)$

β) $A(1, 4)$ $B(2, 4)$

γ) $A(\sqrt{3}, 3)$ $B(0, 4)$

δ) $A(1, -1)$ $B(1, 2)$

ε) $A(0, \sqrt{3})$ $B(0, 0)$

α) $\lambda = \frac{7 - (-2)}{3 - (-6)} = \frac{9}{9} = 1, \epsilon_{\gamma\omega} = 1 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$

β) $\lambda = \frac{4 - 4}{2 - 1} = \frac{0}{1} = 0, \epsilon_{\gamma\omega} = 0 \Rightarrow \omega = 0$

γ) $\lambda = \frac{4 - 3}{0 - \sqrt{3}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \epsilon_{\gamma\omega} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}$

δ) $\lambda = \frac{2 - (-1)}{1 - 1} = \frac{3}{0}$ δεν ορίζεται, $\omega = \frac{\pi}{2}$

ε) $\lambda = \frac{0 - \sqrt{3}}{0 - 0} = \frac{-\sqrt{3}}{0}$ δεν ορίζεται, $\omega = \frac{\pi}{2}$

Θέμα 4^ο

α) $AB: y - y_B = \lambda \cdot (x - x_B)$

$y - 7 = 1(x - 3)$
 $y = x + 4$

β) $AB: y - y_B = \lambda \cdot (x - x_B)$

$y - 4 = -\sqrt{3} \cdot (x - 0)$

$$y - 7 = 1(x - 3)$$

$$y = x + 4$$

$$b) AB: y - y_B = 0(x - x_B)$$

$$y - 4 = 0$$

$$y = 4 \quad // x x'$$

$$d) AB: y - y_B = 2 \cdot (x - x_B)$$

$$y - 4 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 0)$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$$

$$e) AB: x = L \quad // y y'$$

$$f) AB: x = 0 \quad // y y'$$