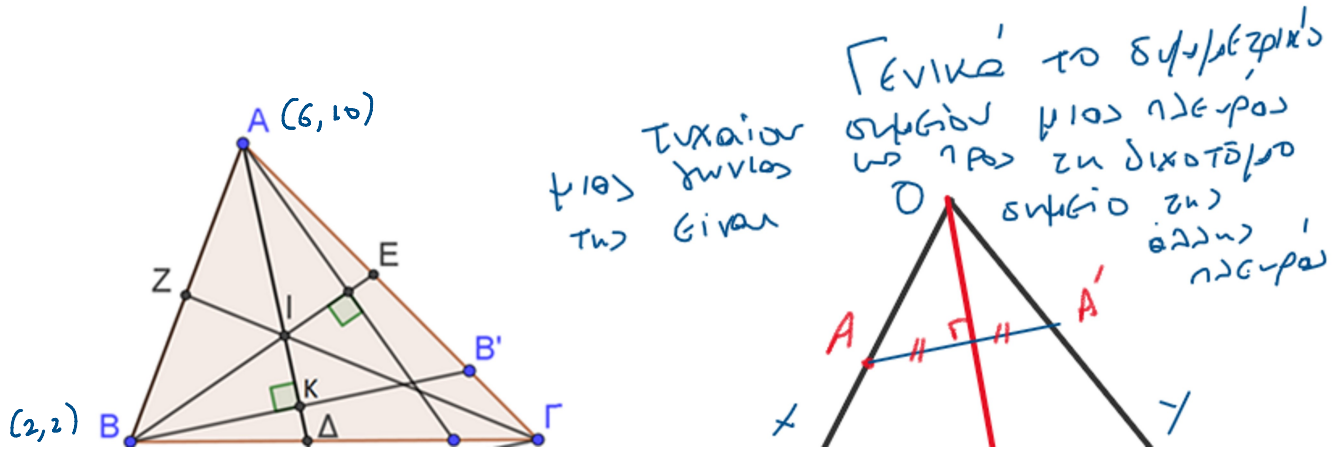


Μάθημα 31 - Εξίσωση ευθείας που έχει μια ιδιότητα

Εφαρμογή : Αν $A(6,10)$, $B(2,2)$ και η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας A είναι $3x + y = 28$, να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς $ΑΓ$.



$$AD: 3x + y = 28 \Rightarrow y = -3x + 28, \lambda_{AD} = -3$$

$$BK \perp AD \Rightarrow \lambda_{BK} \cdot \lambda_{AD} = -1 \Rightarrow \lambda_{BK} \cdot (-3) = -1 \Rightarrow \lambda_{BK} = \frac{1}{3}$$

$$BK: y - y_B = \lambda_{BK} \cdot (x - x_B) \Rightarrow \boxed{y - 2 = \frac{1}{3}(x - 2)}$$

Το K είναι το σημείο τομής των AD και BK οπότε οι συντεταγμένες του K είναι η λύση του συστήματος

$$K: \begin{cases} y - 2 = \frac{1}{3}(x - 2) \\ y = -3x + 28 \end{cases} \Rightarrow -3x + 28 - 2 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow -9x + 78 = x - 2 \Rightarrow -10x = -80 \Rightarrow \boxed{x = 8}, \boxed{y = 4}$$

Αρα $K(8,4)$

Το συμπέρασμα του B ως προς την AD είναι το B' και είναι σημείο της $ΑΓ$.

$$K \text{ μέσο } BB' \Rightarrow \begin{cases} x_K = \frac{x_B + x_{B'}}{2} \\ y_K = \frac{y_B + y_{B'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = \frac{2 + x_{B'}}{2} \Rightarrow x_{B'} = 14 \\ 4 = \frac{2 + y_{B'}}{2} \Rightarrow y_{B'} = 6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B'(14,6)}$$

$$\lambda_{AG} = \lambda_{AB'} = \frac{6 - 10}{14 - 6} = -\frac{1}{2}$$

$$AG: y - y_A = \lambda_{AG}(x - x_A) \Rightarrow \boxed{y - 10 = -\frac{1}{2}(x - 6)}$$

Μεθοδολογία ασκήσεων

Εύρεση εξίσωσης ευθείας της οποίας δίνεται ή μπορεί να βρεθεί άμεσα ο συντελεστής διεύθυνσης και ικανοποιεί μια συνθήκη.

Τρόπος λύσης

1. Βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης λ (αν δεν δίνεται αξιοποιώντας την αντίστοιχη πληροφορία).
2. Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $y = \lambda x + \beta$.
3. Βρίσκουμε τις τιμές του β από την απαίτηση η ευθεία να ικανοποιεί τη δοσμένη συνθήκη.

Θέμα 1ο (άσκηση 6 Β' ομάδας παραγράφου 2.1 σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y'$ στα σημεία A και B , ώστε το άθροισμα της τετμημένης του A και της τεταγμένης του B να είναι ίσο με 15.

Αφού η ζητούμενη ευθεία (ε) είναι παράλληλη
στην (η) : $y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$ είναι $\lambda_\varepsilon = \lambda_\eta = -\frac{2}{3}$

Οποια (ε) : $y = -\frac{2}{3}x + \beta$

Αναζητώ το β από την απαίτηση $x_A + y_B = 15$ (1)

$$A(x_A, 0) \in (\varepsilon) \Rightarrow 0 = -\frac{2}{3}x_A + \beta \Rightarrow x_A = \frac{3\beta}{2} \quad (2)$$

$$B(0, y_B) \in (\varepsilon) \Rightarrow y_B = \beta \quad (3)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} \xrightarrow{(3)} \frac{3\beta}{2} + \beta = 15 \Rightarrow 3\beta + 2\beta = 30 \Rightarrow 5\beta = 30 \Rightarrow \boxed{\beta = 6}$$

Τελικά (ε) : $y = -\frac{2}{3}x + 6$

Μεθοδολογία ασκήσεων

Εύρεση εξίσωσης ευθείας που διέρχεται από ένα γνωστό σημείο $A(x_0, y_0)$ και ικανοποιεί μια συνθήκη.

Τρόπος λύσης

- Από το σημείο $A(x_0, y_0)$ διέρχονται άπειρες ευθείες της μορφής $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ και η $x = x_0$.
- Ελέγχουμε αν η $x = x_0$ αποτελεί λύση δηλαδή αν ικανοποιεί τη δοσμένη συνθήκη.
- Βρίσκουμε τις τιμές του λ για τις οποίες η $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ ικανοποιεί τη δοσμένη συνθήκη.

Θέμα 2ο (άσκηση 1 Β' ομάδας παραγράφου 2.1 σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που διέρχονται από το σημείο $A(-1, 2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Από το $A(-1, 2)$ διέρχονται οι ευθείες της μορφής

$$\boxed{y - 2 = \lambda(x + 1)} \text{ και η } \boxed{x = -1}$$

1η) Αν $(\epsilon): x = -1$ τότε $\epsilon \parallel \gamma\gamma'$ που δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες, οπότε δεν αποτελεί λύση.

2η) Βρίσκω τις τιμές του λ για τις οποίες γ (ϵ): $y - 2 = \lambda(x + 1)$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο
για $x = 0$: $y - 2 = \lambda \Rightarrow y = \lambda + 2$ οπότε τέλη των $\gamma\gamma'$ στο $A(0, \lambda + 2)$

$$\text{για } y = 0: 0 - 2 = \lambda x + \lambda \Rightarrow \lambda x = -\lambda - 2$$

$$\text{Αν } \lambda = 0 \text{ τότε } 0x = -2 \text{ ΑΔΥΝΑΤΗ}$$

$$\text{Αν } \lambda \neq 0 \text{ τότε } x = \frac{-(\lambda + 2)}{\lambda} \text{ οπότε τέλη των } \kappa\kappa' \text{ στο } B\left(\frac{-(\lambda + 2)}{\lambda}, 0\right)$$

Για να 'χω το τρίγωνο OAB ισοσκελές πρέπει να ισχύει

$$OA = OB \neq 0 \Leftrightarrow |\lambda + 2| = \left| \frac{-(\lambda + 2)}{\lambda} \right| \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda \neq -2 \text{ και } |\lambda + 2| = \frac{|\lambda + 2|}{|\lambda|} \xrightarrow{\lambda \neq -2} |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

(2ος τρόπος)
 $\lambda = 45^\circ$ ή $\lambda = 135^\circ$

$2 \neq -2$ kan $\frac{1}{|2|}$

Γ₁₀ $2=1: y-2=x+1 \Rightarrow \boxed{y=x+3}$
 Γ₁₀ $2=-1: y-2=-x-1 \Rightarrow \boxed{y=-x+1}$

$2 \rightarrow \tau \rho \alpha \nu$
 $2 = 45^\circ$ ή $2 = 135^\circ$
 $2 = 1$ $2 = -1$

