

## Μάθημα 32 - Εξίσωση ευθείας που έχει μια ιδιότητα

### Θέμα 3ο (άσκηση 3 Β' ομάδας παραγράφου 2.1 σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $M(2,1)$  και τέμνει τις ευθείες  $y=x+1$  και  $y=-x+1$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντιστοίχως, έτσι ώστε το  $M$  να είναι μέσο του  $AB$ .

1ος τρόπος / Έστω  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$

$$M \text{ μέσο του } AB \rightarrow \frac{x_A + x_B}{2} = x_M \rightarrow \boxed{x_A + x_B = 4} \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{y_A + y_B}{2} = y_M \rightarrow \boxed{y_A + y_B = 2} \quad (2)$$

$$A \in y = x + 1 \Rightarrow y_A = x_A + 1 \quad (3)$$

$$B \in y = -x + 1 \Rightarrow y_B = -x_B + 1 \quad (4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow y_A + y_B = x_A - x_B + 2 \xrightarrow{(2)} 2 = x_A - x_B + 2 \Rightarrow \boxed{x_A = x_B} \quad (5)$$

$$(1) \xrightarrow{(5)} 2x_A = 4 \Rightarrow \boxed{x_A = 2} \quad \text{οπότε } (5) \Rightarrow \boxed{x_B = 2}$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{y_A = 3} \quad \text{και } (4) \Rightarrow \boxed{y_B = -1}$$

$$\text{Συνεπώς } A(2, 3), B(2, -1) \quad \text{και } AB: \boxed{x = 2}$$

2ος τρόπος / Από το  $M(2,1)$  διέρχονται οι ευθείες του παραγίν

$$y - 1 = 2(x - 2) \quad \text{και η } x = 2.$$

Ελέγχω αν η  $x = 2$  αποτελεί λύση.

$$A: \begin{cases} x = 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad A(2, 3)$$

$$B: \begin{cases} x = 2 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad B(2, -1)$$

$$\text{Το μέσο του } AB \text{ είναι το}$$

$$\left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$\left( \frac{2 + 2}{2}, \frac{3 + (-1)}{2} \right)$$

$$(2, 1) \text{ δηλαδή το } M$$

Οπότε η ευθεία  $\boxed{x = 2}$  αποτελεί λύση.

• Βρίσκω τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες η  $y-1=\lambda(x-2)$  αποτελεί λύση.

$$A: \begin{cases} y-1=\lambda(x-2) \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x+1-1 &= \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow \lambda x - x = 2\lambda \Leftrightarrow \\ x(\lambda-1) &= 2\lambda \end{aligned}$$

Αν  $\lambda=1$  τότε  $0x=2$  αδύνατο  
 Αν  $\lambda \neq 1$  τότε  $\boxed{x = \frac{2\lambda}{\lambda-1}}$  και  $y = \frac{2\lambda}{\lambda-1} + 1 \Rightarrow$   
 $\boxed{y = \frac{3\lambda-1}{\lambda-1}}$   
 $A\left(\frac{2\lambda}{\lambda-1}, \frac{3\lambda-1}{\lambda-1}\right)$

$$B: \begin{cases} y-1=\lambda(x-2) \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} -x+1-1 &= \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow \lambda x + x = 2\lambda \Leftrightarrow \\ (\lambda+1)x &= 2\lambda \end{aligned}$$

Αν  $\lambda=-1$  τότε  $0x=-2$  αδύνατο  
 Αν  $\lambda \neq -1$  τότε  $\boxed{x = \frac{2\lambda}{\lambda+1}}$  και  $y = \frac{-2\lambda}{\lambda+1} + 1 \Rightarrow$   
 $\boxed{y = \frac{-\lambda+1}{\lambda+1}}$   
 Άρα  $B\left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}, \frac{-\lambda+1}{\lambda+1}\right)$

Τίποτα Μέσο AB  $\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$  και  $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$   
 $2 = \frac{\frac{2\lambda}{\lambda-1} + \frac{2\lambda}{\lambda+1}}{2} \Leftrightarrow$

$$4 = \frac{2\lambda}{\lambda-1} + \frac{2\lambda}{\lambda+1} \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda-1)(\lambda+1) = \cancel{(\lambda-1)(\lambda+1)} \frac{2\lambda}{\cancel{\lambda-1}} + \cancel{(\lambda-1)(\lambda+1)} \frac{2\lambda}{\cancel{\lambda+1}} \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 4 = 2\lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda \Leftrightarrow -4 = 0 \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

Τέλος παραδίδει λύση η ερώτηση  $\boxed{x=2}$