

(2). $Ax + By + \Gamma = 0$, $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

Αν $B \neq 0$ τότε έχει συντελεστή διευθύνουσας $\lambda = -\frac{A}{B}$

Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$ έχει $\lambda_{\vec{\delta}} = -\frac{A}{B}$ οπότε $\vec{\delta} \parallel \varepsilon$

Ενώ το $\vec{\eta} = (A, B)$ είναι κάθετο στο $\vec{\delta}$ αφού

$$\vec{\eta} \cdot \vec{\delta} = -AB + AB = 0 \text{ οπότε } \vec{\eta} \perp \varepsilon.$$

Αν $B = 0$ τότε $(\varepsilon) \parallel \gamma\gamma'$ όπως και το $\vec{\delta} = (-B, A) \parallel \gamma\gamma'$
 οπότε $\vec{\delta} \parallel \varepsilon$ και $\vec{\eta} \perp \varepsilon$

Σε κάθε περίπτωση το $\vec{\delta} = (-B, A) \parallel \varepsilon$, $\vec{\eta} = (A, B) \perp \varepsilon$
 όπου (2) $Ax + By + \Gamma = 0$, $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

Εφαρμογή 1 / Εύρεση σχετικού θέσης ευθειών στην
 περίπτωση που η εξίσωση έχει παραμετρο

Σκοπ. σελ. 69

(A5)

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$, ώστε οι ευθείες $(\lambda-1)x + \lambda y + 8 = 0$ και ε_1

$\varepsilon_2: \lambda x + 3y + 1 - 2\lambda = 0$ να είναι κάθετες.

$$\vec{\delta}_1 = (-2, 2-1) \parallel \varepsilon_1, \quad \vec{\delta}_2 = (-3, 2) \parallel \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \iff \vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \iff \vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0 \iff -2(-3) + (2-1)2 = 0 \iff 3 \cdot 2 + 2^2 - 2 = 0 \iff 2^2 + 2 \cdot 2 = 0$$

$2 = 0$
ή
 $2 = -2$

2η Εφαρμογή / Εύρεση γωνίας μεταξύ 2 ευθειών

$\varepsilon_1: y - \sqrt{3}x = 0$

$\vec{\delta}_1 = (\sqrt{3}, 1) \parallel \varepsilon_1$

$$\cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2}} =$$

$\varepsilon_2: 3y - \sqrt{3}x = 0$

$\vec{\delta}_2 = (\sqrt{3}, 3) \parallel \varepsilon_2$

$$= \frac{3+3}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{12}} = \frac{6}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



οπότε $(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\pi}{6}$

4. Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες $y = \mu x$ και $(1+m)x = (1-m)y$

4. Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες $y = \mu x$ και $(1+\mu)x = (1-\mu)y$.

$$\varepsilon_1: y = \mu x \Rightarrow \mu x - y = 0 \rightarrow \vec{s}_1 = (1, \mu)$$

$$\varepsilon_2: (1+\mu)x = (1-\mu)y \Leftrightarrow (1+\mu)x - (1-\mu)y = 0 \rightarrow \vec{s}_2 = (1-\mu, 1+\mu)$$

$$\cos(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{1 \cdot (1-\mu) + \mu(1+\mu)}{\sqrt{1^2 + \mu^2} \cdot \sqrt{(1-\mu)^2 + (1+\mu)^2}} = \frac{1-\mu + \mu + \mu^2}{\sqrt{1+\mu^2} \cdot \sqrt{1-2\mu + \mu^2 + 1+2\mu + \mu^2}} =$$

$$= \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2} \cdot \sqrt{2+2\mu^2}} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+\mu^2}} = \frac{1+\mu^2}{(1+\mu^2)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Συνεπώς $(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{\pi}{4}$ οπότε η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι $\frac{\pi}{4}$