

Μάθημα 36ο - Επίλυση συστημάτων με ορίζουσες

Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 , είναι της μορφής $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ τότε

βρίσκουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y όπου

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha \cdot \beta' - \beta \cdot \alpha'$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma \cdot \beta' - \beta \cdot \gamma'$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha \cdot \gamma' - \gamma \cdot \alpha'$$

- Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική (μία μόνο) λύση την (x, y) όπου

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ και } y = \frac{D_y}{D}$$

Ισχύει και το αντίστροφο: Αν ένα σύστημα έχει μοναδική λύση τότε $D \neq 0$

- Αν $D = 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο. Συγκεκριμένα :

➤ αν οι δύο εξισώσεις έχουν (ή μετατραπούν με κατάλληλο πολλαπλασιασμό ώστε να έχουν) τα 1α μέλη ίσα και τα 2α άνισα τότε το σύστημα είναι αδύνατο

➤ αν οι δύο εξισώσεις είναι (ή μετατραπούν με κατάλληλο πολλαπλασιασμό ώστε να είναι) ακριβώς ίδιες τότε το σύστημα είναι αόριστο, εκτός αν έχουμε τη σπάνια περίπτωση όπου το σύστημα έχει τη μορφή

$$\begin{cases} 0x + 0y = \gamma \\ 0x + 0y = \gamma' \end{cases} \text{ με } \gamma \neq 0 \text{ όπου είναι αδύνατο. π.χ. } \begin{cases} 0x + 0y = 3 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases} \text{ αδύνατο}$$

Θέμα 1ο Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} 3y + 2x = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 = -4 - 9 = -13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -24 - 15 = -39$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 12 = 10 - 36 = -26$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-39}{-13} = 3$$

Λύση $(3, 2)$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-13} = 2$$

Θέμα 2ο Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 5 \\ 3\sqrt{3} \cdot x - 2\sqrt{2} \cdot y = \sqrt{6} \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \cdot \sqrt{2}^2 - 3 \cdot \sqrt{3}^2 = -4 - 9 = -13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} = -10\sqrt{2} - \sqrt{18} = -10\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -13\sqrt{2}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 5 \\ 3\sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix} = \sqrt{12} - 15\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -13\sqrt{3}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13\sqrt{2}}{-13} = \sqrt{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-13\sqrt{3}}{-13} = \sqrt{3}$$

Λύση
($\sqrt{2}, \sqrt{3}$)

Θέμα 3ο Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = 7 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) = -12 + 12 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = 7 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 6y = -10 \\ -4x - 6y = 7 \end{cases} \quad \text{Αδύνατο}$$

Θέμα 4ο Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 6y = -10 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$$

Αόριστη Σηλωτική
Έχει άπειρες
Λύσεις της μορφής
 $(k, \frac{5-2k}{3}), k \in \mathbb{R}$

Θέμα 5ο Να λυθεί (διερευνηθεί) το σύστημα $\begin{cases} (\lambda+1)x + y = \lambda-2 \\ 2x + \lambda y = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + \lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)$$

($\lambda, \lambda-1$)

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2+1 & 2-2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2^2 - 2 - 2 \cdot 2 + 4 = -2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = -(2-1)(2+4)$$

• Αν $2 \neq -2$ και $2 \neq 1$ τότε $D \neq 0$ και το σύστημα έχει

1 λύση (x, y) όπου

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(2-1)}{(2-1)(2+2)} = \frac{2}{2+2}$$

$$\left(\frac{2}{2+2}, -\frac{2+4}{2+2} \right) \begin{matrix} 2 \in \mathbb{R} \\ 2 \neq -2 \\ 2 \neq 1 \end{matrix}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-(2-1)(2+4)}{(2+2)(2-1)} = -\frac{2+4}{2+2}$$

• Αν $2 = -2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -x + y = -4 \\ 2x - 2y = +2 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 8 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

Αδύνατο

• Αν $2 = 1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

Απορρίπτω όποτε έχω άπειρες λύσεις
και λοιπός $(\kappa, -1-2\kappa) \kappa \in \mathbb{R}$

λύσεων