

ΘΕΜΑ 4

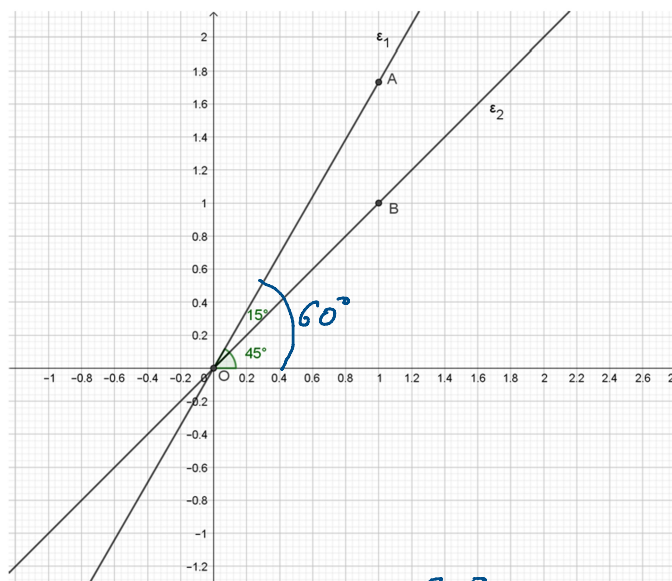
Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2: y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα xx' .

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι 15° .

δ) Να αποδείξετε ότι $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.



α) $\varepsilon_1: y = \sqrt{3} \cdot x$

x	0	1
y	0	$\sqrt{3}$

$O(0,0), A(1,\sqrt{3})$

$\varepsilon_2: y = x$

x	0	1
y	0	1

$O(0,0), B(1,1)$

β) $\lambda_1 = \sqrt{3}$

$\varepsilon_1 \theta_1 = \sqrt{3}$

$\theta_1 = 60^\circ$

$\lambda_2 = 1$

$\varepsilon_2 \theta_2 = 1$

$\theta_2 = 45^\circ$

γ) $\theta = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$

δ) $\vec{s}_1 = (1, \sqrt{3}) // \varepsilon_1, \vec{s}_2 = (1, 1) // \varepsilon_2$

$$\sin 15^\circ = \sin(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + 3} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Θέμα 4°

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - (y^2 + 4\lambda y + 4\lambda^2) = 0$$

$$(x - \lambda)^2 - (y + 2\lambda)^2 = 0$$

$$(x - \lambda + y + 2\lambda)(x - \lambda - y - 2\lambda) = 0$$

$$(x + y + \lambda)(x - y - 3\lambda) = 0$$

$$x + y + \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad x - y - 3\lambda = 0$$

ε_1

$\lambda_{\varepsilon_1} = -1$

ε_2

$\lambda_{\varepsilon_2} = 1$

$\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Rightarrow$

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

(ε): $Ax + By + \Gamma = 0$
 $A \vee B \neq 0 \quad \lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B}$

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + y = 2\lambda$ (1) και $x + \lambda y = \lambda + 1$ (2), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ

και η_λ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται.

γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

i. να βρείτε συναρτήσει του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ε_λ

και η_λ .

ii. αν $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ να αποδείξετε ότι το M κινείται στην ευθεία $\zeta: x - y = 1$

α) α) $\rightarrow 2x + y = 2\lambda$, $A = 2$, $B = 1 \neq 0$ οπότε παριστάνει ευθεία
(2) $\rightarrow x + \lambda y = \lambda + 1$, $A = 1 \neq 0$ οπότε παριστάνει ευθεία

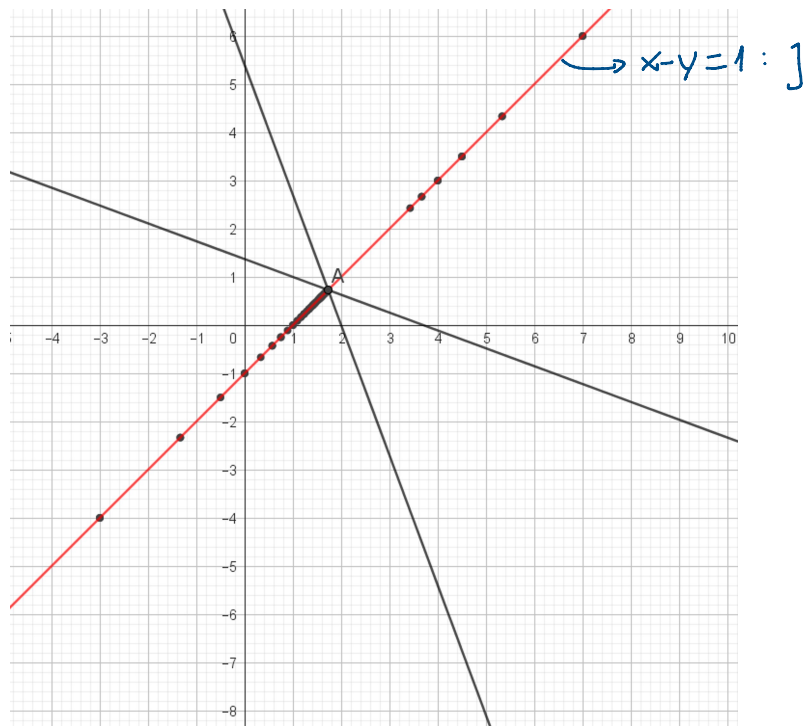
β) Πρέπει και αρκεί $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2^2 - 1 \neq 0$
 $D = 2^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$
 $2 \neq 1$ και $2 \neq -1$

$$\gamma) D_x = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ \lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(2\lambda + 1) \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2\lambda \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 2^2 + 2 - 2\lambda = 2^2 - 2 = 2(\lambda - 1) \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{\lambda + 1}$$

$$M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{2}{\lambda+1}\right) \quad \lambda \neq 1, \lambda \neq -1$$

$$\delta) M \in \zeta \Leftrightarrow \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} - \frac{2}{\lambda+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda+1}{\lambda+1} = 1 \quad \text{που ισχύει}$$



Θέμα 3^ο

Να υπολογιστεί η οξεία γωνία των παρακάτω ευθειών $\varepsilon: 5x - y + 3 = 0$ και $\zeta: 3x + 2y - 5 = 0$.

$$\vec{s}_1 = (1, 5) \parallel \varepsilon, \quad \vec{s}_2 = (2, -3) \parallel \zeta$$

$$\cos(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{1 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{-13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-13}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

οπότε $(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 135^\circ$ οπότε η οξεία γωνία των ε, ζ είναι 45°