

Μάθημα 43ο - Εξίσωση κύκλου ασκήσεις

Θέμα 8° Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - \lambda y + \lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε

για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο.

Λύση

$$A = 2, B = -\lambda, \Gamma = \lambda + 1$$

Πρέπει και αρκεί $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow$

$$2^2 + (-\lambda)^2 - 4(\lambda + 1) > 0$$

$$4 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 > 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda > 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda \quad \begin{array}{c|ccc} & -\infty & 0 & 4 & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & + \end{array}$$

$$\text{Συνεπώς } \lambda \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

Θέμα 9° Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + \lambda - 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του λ

Λύση

A.v.s.o. $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A = \lambda + 1, B = \lambda - 1, \Gamma = \lambda - 2$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda + 1)^2 + (\lambda - 1)^2 - 4(\lambda - 2) =$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4\lambda + 8 =$$

$$2\lambda^2 - 4\lambda + 10 > 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -64 < 0$$

$$\text{και } a = 2 > 0$$

Θέμα 10° Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να

βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία ε να εφάπτεται του κύκλου

Λύση

Πρέπει και αρκεί $d(K, \varepsilon) = r$

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \quad r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$K(2, 0) \quad (\varepsilon): 2x - y = 0$$

$$d(K, \varepsilon) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 2 - 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |2\lambda| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1}$$

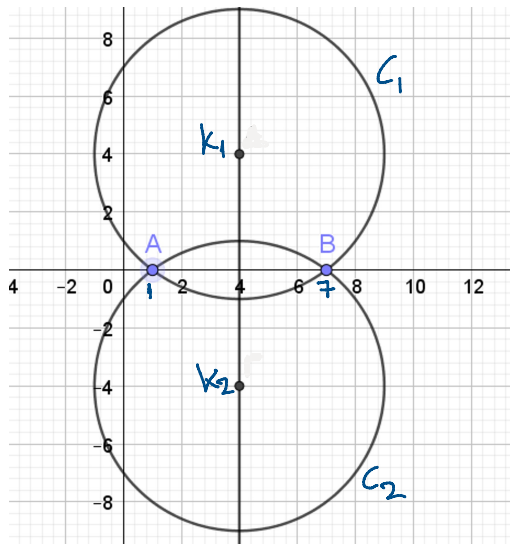
$$\Leftrightarrow |2\lambda|^2 = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2 = 3\lambda^2 + 3 \Leftrightarrow \lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |2z|^2 = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2+1})^2 \Leftrightarrow 4z^2 = 3z^2 + 3 \Leftrightarrow z^2 = 3$$

$$\boxed{z = \pm\sqrt{3}}$$

5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν έχει ακτίνα $\rho=5$ και τέμνει τον άξονα x' στα σημεία $A(1,0)$ και $B(7,0)$



Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου.

$(KA) = (KB) \Rightarrow K$ ανήκει στη μεσοκαθέτου των $AB \Rightarrow \boxed{x_0 = 4}$ οπότε $K(4, y_0)$

$$(KA) = 5 \Rightarrow \sqrt{(4-1)^2 + (y_0-0)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{9 + y_0^2} = 5 \Rightarrow 9 + y_0^2 = 25 \Rightarrow y_0^2 = 16 \Rightarrow y_0 = 4 \text{ ή } y_0 = -4$$

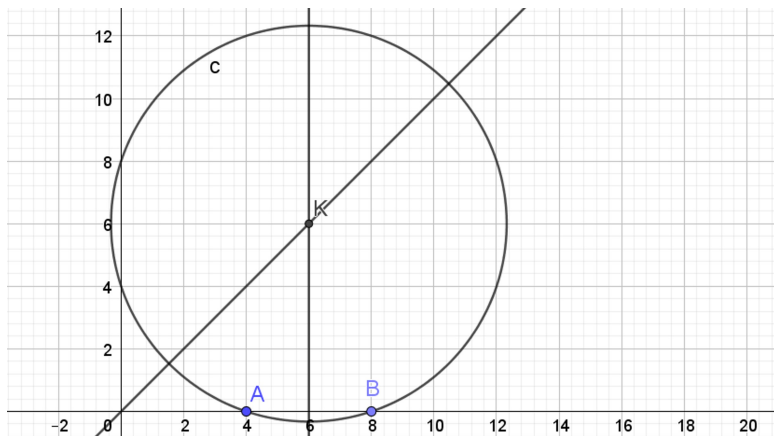
$K_1(4, 4)$

$$C_1: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$K_2(4, -4)$

$$C_2: (x-4)^2 + (y+4)^2 = 25$$

(ii) Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=x$



Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου

$$K \in y=x \Rightarrow \boxed{x_0 = y_0}$$

οπότε $K(x_0, x_0)$

$(KA) = (KB) \Rightarrow$ το K ανήκει στη μεσοκαθέτου των $AB \Rightarrow$

$$x_0 = 6$$

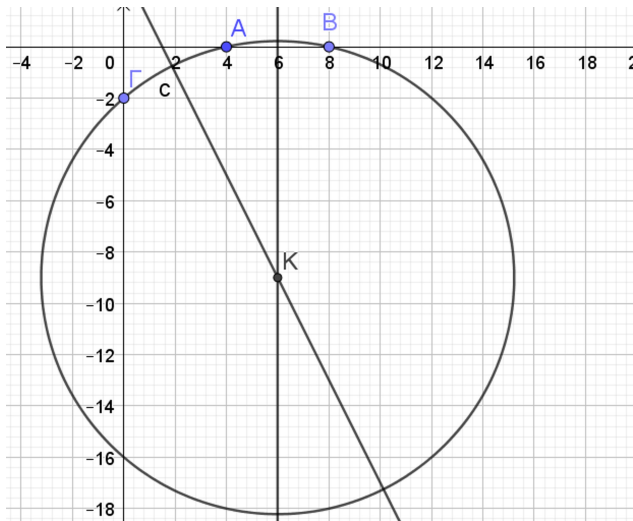
Συνεπώς $K(6, 6)$

Τέλος

$$R = (KA) = \sqrt{(6-4)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \text{ οπότε}$$

$$C: (x-6)^2 + (y-6)^2 = 40$$

- (i) Όταν τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(0,\mu)$.



1ος τρόπος

$$K(x_0, y_0)$$

$$(KA) = (KB) \Rightarrow \boxed{x_0 = 6}$$

$$(KA) = (KC) \Rightarrow$$

$$\sqrt{(6-4)^2 + (y_0-0)^2} = \sqrt{(6-0)^2 + (y_0+2)^2} \Rightarrow$$

$$4 + y_0^2 = 36 + y_0^2 + 4y_0 + 4 \Rightarrow$$

$$4y_0 = -36 \Rightarrow \boxed{y_0 = -9}$$

$$K(6, -9)$$

Τότε $r = (KA) = \sqrt{(6-4)^2 + (-9-0)^2} = \sqrt{85}$ οπότε

$$C: (x-6)^2 + (y+9)^2 = 85$$

2ος τρόπος

$$C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} A(4,0) \in C \Rightarrow 16 + 4A + \Gamma = 0 \\ B(8,0) \in C \Rightarrow 64 + 8A + \Gamma = 0 \\ \Gamma(0,-2) \in C \Rightarrow 4 - 2B + \Gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (-) -48 - 4A = 0 \Rightarrow A = -12 \\ \text{και } 16 - 48 + \Gamma = 0 \Rightarrow \\ \Gamma = 32 \end{array}$$

$$\Gamma(0,-2) \in C \Rightarrow 4 - 2B + \Gamma = 0$$

$$\text{και } 4 - 2B + 32 = 0 \Rightarrow B = 18$$

$$\text{οπότε } C: x^2 + y^2 - 12x + 18y + 32 = 0$$