

Θέμα 3^ο

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $(x-1)^2 + y^2 = 2$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $\psi = \chi + 3$ (να γίνει σχήμα)

Αφού η ζητούμενη εφαπτομένη είναι παράλληλη στην $\chi = \kappa + 3$
θα έχει $\lambda = 1$ και εξίσωση της μορφής $\chi = \kappa + \beta$.

Αναζητώ το β .

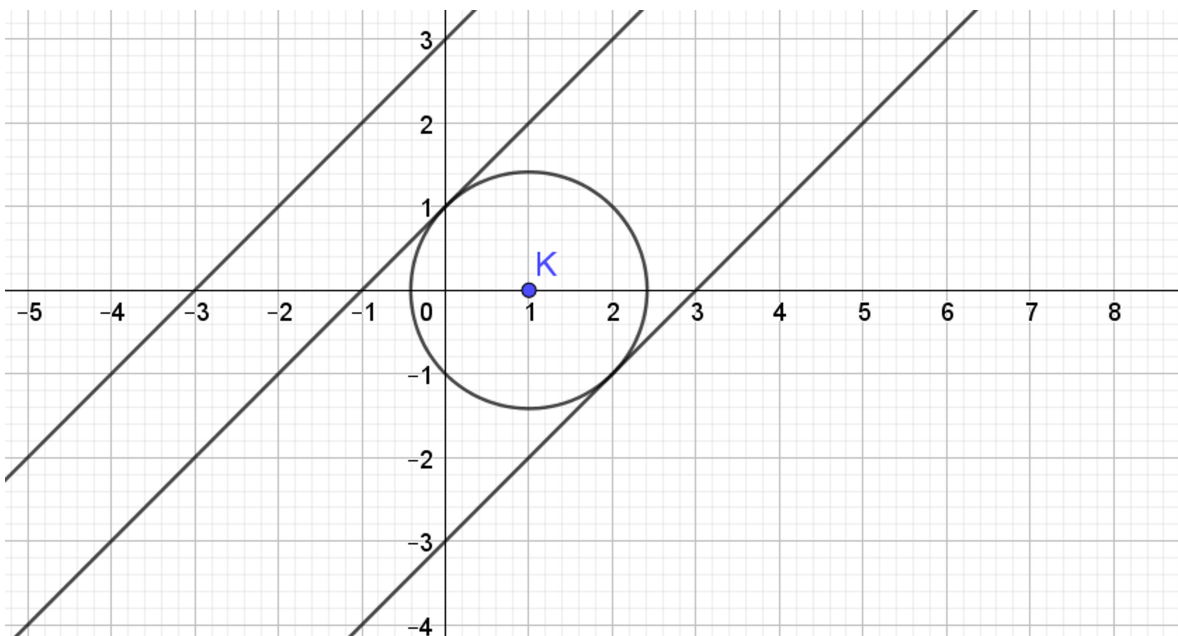
Για να εφάπτεται η $\chi - \chi + \beta = 0$ στον κύκλο C με $K(1,0)$, $\rho = \sqrt{2}$

πρέπει και αρκεί $d(K, \ell) = \rho \Leftrightarrow \frac{|1 \cdot 1 - 0 + \beta|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{|1+\beta|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |1+\beta| = 2 \Leftrightarrow \begin{matrix} 1+\beta = 2 & \text{ή} & 1+\beta = -2 \\ \boxed{\beta = 1} & & \boxed{\beta = -3} \end{matrix}$$

$$\text{Ε}_1: \chi = \kappa + 1$$

$$\text{Ε}_2: \chi = \kappa - 3$$



Θέμα 4^ο

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ που διέρχονται από το σημείο $A(1,0)$ (να γίνει σχήμα)

$$A=0, B=-4, \Gamma=3 \quad K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow K(0,2)$$

$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \sqrt{0^2 + 16 - 12} = 2 = 1$$

$$p = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 16 - 12}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Αν' το $A(1,0)$ Στεφκοντα ενθεις ως μορφης (ε): $y = 2(x-1)$
 και η (j): $x=1$

• Εφαρμοζω αν η (j): $x=1$ εφαπτεται τω C οηδη $d(K,j)=p$

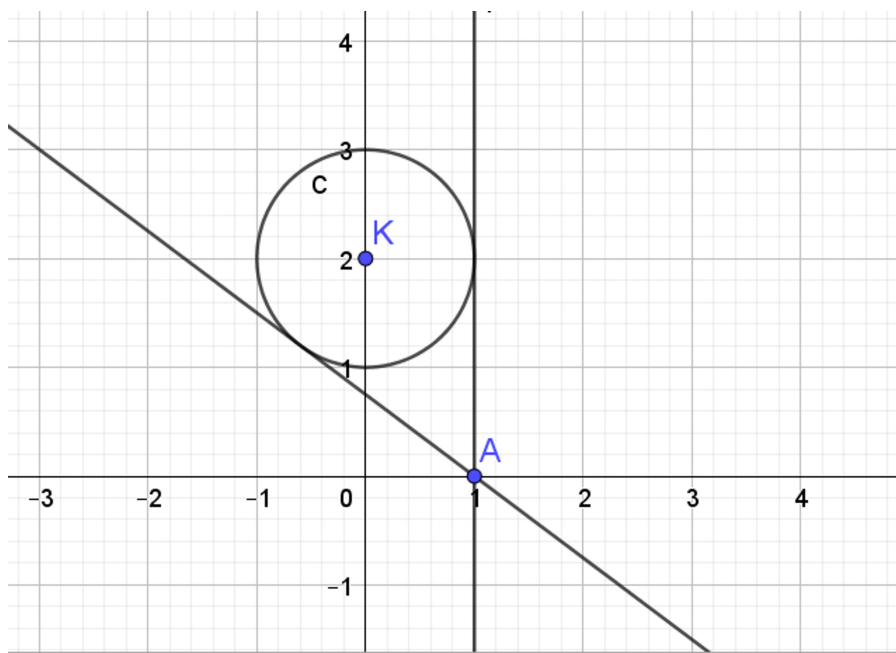
Γινα $d(K,j) = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 1 = p \rightarrow$ Απο η (j): $x=1$ εφαπτεται τω C.

• Βρισκω τις τυεις τω λ ωστε η (ε): $y = 2(x-1) \Rightarrow 2x - y - 2 = 0$
 εφαπτεται τω C. Τηρηη και αρκη

$$d(K,\epsilon) = p \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 0 - 2 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 1 \Leftrightarrow |-2 - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$|-2 - \lambda|^2 = \sqrt{\lambda^2 + 1}^2 \Leftrightarrow 4 + 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 4\lambda = -3 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -3/4 \text{ και } (ε) y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$



2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 3$

(ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$

(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$

1ος τρόπος / (χωρίς σημείο επαφής)

Αφού η ζητούμενη εφαπτομένη είναι παράλληλη στην $y = 2x + 3$
θα έχει $2 = 2$ και εξίσωση της μορφής $y = 2x + b$.

Αναζητώ το b .

Για να εφάπτεται η $2x - y + b = 0$ στον κύκλο $C(k(0,0), r = \sqrt{5})$
πρέπει και αρκεί $d(k, \ell) = r \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |b| = 5 \Leftrightarrow$

$$b = 5 \text{ ή } b = -5$$

$$\Sigma_1: y = 2x + 5 \quad \Sigma_2: y = 2x - 5$$

2ος τρόπος / (με σημείο επαφής)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Τότε

$$(\ell): x x_1 + y y_1 = 5$$

$$\lambda_{\ell} = 2 \Rightarrow -\frac{x_1}{y_1} = 2 \Rightarrow \boxed{x_1 = -2y_1} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M \in C &\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 5 \xrightarrow{(1)} (-2y_1)^2 + y_1^2 = 5 \Rightarrow 4y_1^2 + y_1^2 = 5 \Rightarrow \\ 5y_1^2 &= 5 \Rightarrow y_1^2 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 \quad \text{ή} \quad y_1 = -1 \\ &\quad x_1 = -2 \quad \quad x_1 = 2 \\ \Sigma_1: &-2x + y = 5 \quad \quad \Sigma_2: 2x - y = 5 \end{aligned}$$

