

Μάθημα 48ο - Λύση εργασίας

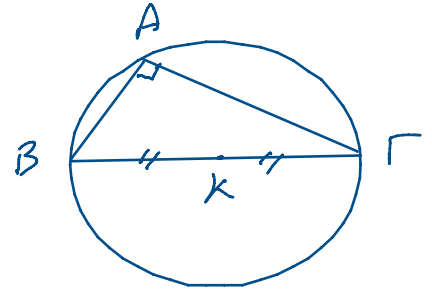
Θέμα 2°

Δίνονται τα σημεία A (1, 2), B (2, 4) και Γ (3, 1).

α) Να αποδειχθεί ότι: γωνία BΑΓ = 90°

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ.

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \vec{AB} &= (1, 2) & \vec{AB} \cdot \vec{AG} &= 2 - 2 = 0 \\ \vec{AG} &= (2, -1) & \vec{AB} &\perp \vec{AG} \\ & & \widehat{BAG} &= 90^\circ \end{aligned}$$



β) Από το $\widehat{BAG} = 90^\circ \Rightarrow$ BΓ διαμέτρο του γιγαντισμένου κύκλου

Το κέντρο του θα είναι το μέσο K του BΓ δηλαδή
το $K(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ και $\rho = KB = \sqrt{(\frac{5}{2} - 2)^2 + (\frac{5}{2} - 4)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$C: (x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{10}{4}$$

Θέμα 3°

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - \lambda y + \lambda + 1 = 0$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση

γ) Να εξετάσετε αν όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο

$$A = 2, B = -\lambda, \Gamma = \lambda + 1$$

Πρέπει και αρκεί $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

$$2^2 + (-\lambda)^2 - 4(\lambda + 1) > 0$$

$$4 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 > 0$$

λ	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$\lambda^2 - 4\lambda$	+	0	-	+

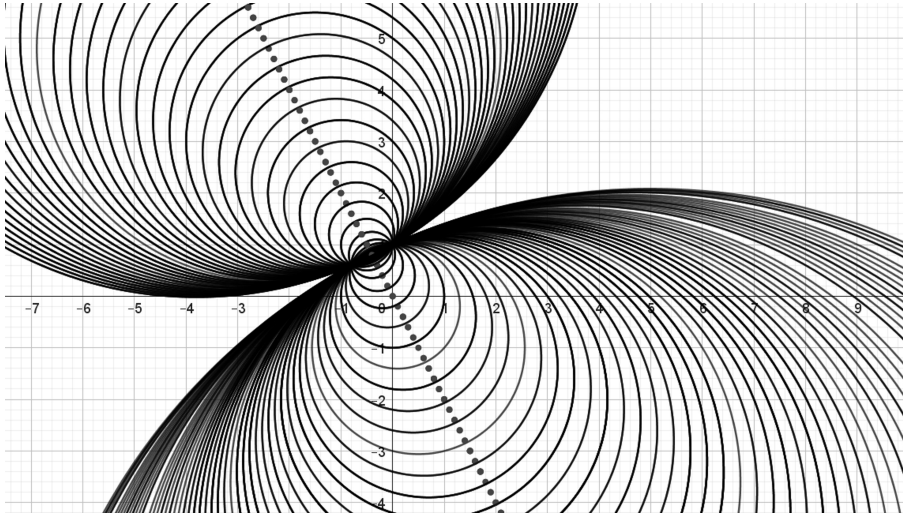
$\Delta < 0$ onozt loxich jia kãje 2FR

$$5\lambda^2 - 2\lambda + 1 > 0$$

$\Delta < 0$ οπότε ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 $a > 0$ και επομένως παριστάνει
 ένα κύκλο

$$K(-\lambda, 2\lambda)$$

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -x \\ \boxed{y = -2x} \end{cases} \rightarrow 0 \text{ ή } 2 \text{ τα } K$$



για $\lambda = 0$

$$C_1: x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

για $\lambda = 1$

$$C_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0 \quad (2)$$

$$C_1 - C_2 \Rightarrow -2x + 4y = 0$$

$$\boxed{x = 2y} \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow 4y^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$5y^2 = 1$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

για $y = \frac{\sqrt{5}}{5}, x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad A\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

για $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}, x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad B\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

Τα σημεία A, B ανήκουν στην αρχική εφισμένη
 και η κοινή χορδή AB έχει εφισμένη $\boxed{x = 2y}$