

Θέμα 1ο

Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x+y+5=0$

- Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C
- Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία ε δεν έχουν κοινά σημεία
- Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία ε και εφάπτονται του κύκλου C

α) $K(2, -3), R = \sqrt{5}$

β) $d(K, \varepsilon) = \frac{|2 \cdot 2 - 3 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}$ οπότε δεν έχουν κοινά σημεία

γ) $(\varepsilon): 2x + y + 5 = 0 \Rightarrow y = -2x - 5, \lambda_\varepsilon = -2$

Οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι $\parallel \varepsilon$ οπότε θα έχουν κλίση -2 και εξίσωση μορφής $y = -2x + b \Rightarrow$
 $(\eta): 2x + y - b = 0$

Πρέπει και αρκεί $d(K, \eta) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 2 - 3 - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$$\frac{|1-b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |1-b| = 5 \Leftrightarrow 1-b = 5 \vee 1-b = -5$$

$$\boxed{b = -4} \quad \boxed{b = 6}$$

Συνεπώς $(\eta_1): y = -2x - 4$ $(\eta_2): y = -2x + 6$

Θέμα 7ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda+1)x - 4(\lambda+1)y + 10\lambda + 5 = 0$

- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο.
- Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση
- Να δείξετε όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο
- Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη όλων των παραπάνω κύκλων

α) $A = -2(\lambda+1), B = -4(\lambda+1), \Gamma = 10\lambda+5$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4(\lambda^2 + 2\lambda + 1) + 16(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - 4(10\lambda + 5) =$$

$$= 4\lambda^2 + 8\lambda + 4 + 16\lambda^2 + 32\lambda + 16 - 40\lambda - 20 = 20\lambda^2$$

$$\left(R = \frac{\sqrt{20\lambda^2}}{2} = \sqrt{5}|\lambda| \right)$$

$$A^2 + B^2 - 4C = 4(\lambda^2 + 2\lambda + 1) + 16(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - 4(10\lambda + 20) =$$

$$= 4\lambda^2 + 8\lambda + 4 + 16\lambda^2 + 32\lambda + 16 - 40\lambda - 20 = 20\lambda^2$$

$$A^2 + B^2 - 4C > 0 \Leftrightarrow 20\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda \neq 0}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{20\lambda}}{2} =$$

$$\frac{2\sqrt{5} \cdot |\lambda|}{2} = \sqrt{5} \cdot |\lambda|$$

β) Το κέντρο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) \rightarrow K(\lambda+1, 2(\lambda+1))$

Θέτω $\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2(\lambda + 1) \end{cases}$ οπότε $\lambda \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Από ο γεωμετρικό δ-2
είναι η ευθεία $y = 2x$
χωρίς το σημείο $(1, 2)$

γ) για $\lambda = -1$ έχω: $C_1: x^2 + y^2 - 5 = 0$ C_1

για $\lambda = 1$ έχω: $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$ C_2

$$C_1 - C_2 \Rightarrow 4x + 8y - 20 = 0$$

$$\boxed{x = 5 - 2y} \quad (3)$$

$$C_1 \xrightarrow{(3)} 25 - 20y + 4y^2 + y^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5y^2 - 20y + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

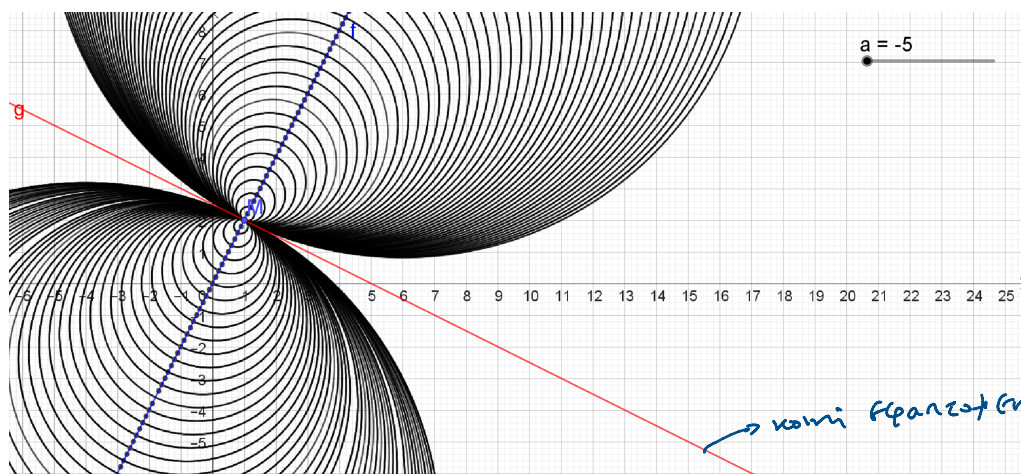
$M(1, 2)$

Ελέγχω αν το $M(1, 2)$ είναι λύση της αρχικής εξίσωσης

$$1^2 + 2^2 - 2(\lambda + 1) \cdot 1 - 4(\lambda + 1) \cdot 2 + 10\lambda + 20 = 0$$

$$0 \geq 0$$

Συνεπώς είναι οι κύκλοι διερχόμενοι από το $M(1, 2)$



Η κοινή εφαπτομένη θα είναι κάθετη στα δ-2 των κυκλών
άρα θα έχει κλίση $-\frac{1}{2}$ και θα διέρχεται από το $M(1, 2)$

$$\rightarrow \boxed{x + 2y - 5 = 0}$$

...
da da eine Kreis $-\frac{1}{2}$ hat da Steigung also so

$$\text{also (J): } y-2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y-4 = -x+1 \rightarrow \boxed{x+2y-5=0}$$

$$\text{Ergebnis } d(K, l) = \frac{|2+1+4-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} = p$$